Apuntes de la asignatura de Álgebra Lineal

Grado en Ingeniería Electrónica de Comunicaciones

M. Ángeles Gómez Flechoso

Univ. Complutense

Programa de la asignatura

1. **Introducción.**

   Nociones de matrices y determinantes. Sistemas de ecuaciones lineales y métodos matriciales de resolución.

2. **Espacios Vectoriales.**

   Definición. Operaciones y propiedades. Dependencia e independencia lineal. Sistemas generadores y bases. Dimensión. Cambio de base. Subespacios vectoriales. Operaciones con subespacios vectoriales.

3. **Aplicaciones lineales.**

   Definición y propiedades. Representaciones matriciales de una aplicación lineal. Cambio de base. Núcleo e imagen. Operaciones con aplicaciones.

4. **Diagonalización de endomorfismos.**

   Polinomio característico. Valores y vectores propios. Diagonalización y subespacios invariantes.

5. **Espacios euclídeos.**

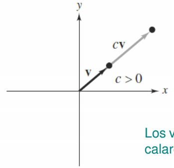
   Espacios euclídeos. Ortogonalidad entre vectores y subespacios. Bases ortogonales y ortonormales. Concepto de proyección ortogonal.

Introducción al curso

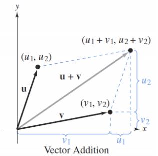
¿Qué objetos vamos a manejar en álgebra lineal?

Escalares: elementos de un cuerpo (por ejemplo: números reales, complejos)
Vectores: objetos que funcionan como los vectores geométricos pero que pueden ser otra cosa (por ejemplo: polinomios u otro tipo de funciones, matrices,. . .)

¿Qué vamos a hacer con los vectores?



Los vectores se pueden multiplicar por escalares



Los vectores se pueden sumar

Vamos a aprender a medir un vector, a orientarlo con respecto a otro, a elegir la manera el sistema de coordenadas que simplifique las operaciones, ...

Vamos a usar matrices y determinantes ¿para qué...?

Las matrices surgen de forma natural al trabajar con sistemas de ecuaciones lineales, aunque su aplicabilidad llega mucho más lejos. De hecho nos va a permitir manipular vectores de forma muy eficiente.

1.1 Estructuras Algebraicas

Introducción

Definición:

Una **estructura algebraica** es un conjunto formado por elementos y donde hay definidas ciertas operaciones que satisfacen unas determinadas propiedades.

$\Downarrow$ Jerarquía de estructuras algebraicas

ESTRUCTURAS	PROPIEDADES	
Semi-grupo	Asociativa (+): $a+(b+c)=(a+b)+c$	Una operación (+)
	Elemento neutro (+): $a+e=e+a=a$	Una operación (+)
Grupo	Elemento simétrico (+): $a+a'=a'+a=e$	Una operación (+)
	Asociativa ($\cdot$): $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$	Dos operaciones $(+,\cdot)$
Anillo	Distributiva ($\cdot$,+): $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$	Dos operaciones $(+,\cdot)$
Anillo unitario	Elemento neutro ($\cdot$): $a\cdot 1=1\cdot a=a$	Dos operaciones $(+,\cdot)$
Cuerpo	Elemento simétrico ($\cdot$): $a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$	Dos operaciones $(+,\cdot)$
Cuerpo Conmutativo	Conmutativa ($\cdot$): $a\cdot b=b\cdot a$	Dos operaciones $(+,\cdot)$

Introducción (continuación)

Símbolos Algebraicos

- $|$ (a veces de usa $:$) *tal que*
- $\Rightarrow$ *si ... entonces*
- $\Leftrightarrow$ *si y sólo si*
- $\in$ *pertenece,* $\notin$ *no pertenece*
- $\forall$ *para todo*
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *conjuntos numéricos*
- $\exists$ *existe,* $\nexists$ *no existe*
- $\exists!$ *existe un único*
- $\subset, \subseteq, \not\subset, \not\subseteq$ *signos de inclusión*
- $\cup$ *unión («o»),* $\cap$ *intersección («y»)*
- $\perp$ *ortogonalidad*
- X_+, X_-, X^* *positivos, negativos, todos menos el* 0

Definiciones y propiedades

Conjunto: Colección de objetos (o elementos) bien definidos. Se denota con letras mayúsculas y sus elementos con letras minúsculas.

Conjunto vacío $\emptyset$*:* carece de elementos

Los elementos se puede denotar:

1) por extensión (ej.: $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$)

2) por comprensión (ej.: $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ es primo} < 10\}$)

Subconjunto: Aquel formado tomando ciertos elementos de un conjunto.

$$B \subset A \Leftrightarrow \forall b \in B \Rightarrow b \in A$$

Subconjuntos impropios de A: $\emptyset$ y A
Subconjuntos propios de A: $B \subset A$ y $B \neq \emptyset$ y $B \neq A$

Definiciones y propiedades (continuación)

Operación interna: Una operación interna definida en un conjunto $X \neq \emptyset$ es una función binaria $\star$ que a cada par ordenado (x, y) de $X \times X$ le hace corresponder un único elemento de X

$$\begin{array}{rccl} \star: & X \times X & \longrightarrow & X \\ & (x, y) & \longrightarrow & z = \star(x, y) = x \star y \end{array}$$

La imagen por la aplicación $\star$ del par (x, y) se denotará por $\star(x, y) = x \star y$ (o sea, si $\star$ es una operación interna en X entonces cualesquiera que sean x e y de X existe $x \star y \in X$ y es único).

Operaciones cerradas

Si el conjunto X es finito, una operación binaria cualquiera $(\star, \perp, \ldots)$ se puede escribir dando su tabla de *multiplicar*. En este ejemplo $X = \{a, b\}$

$\star$	a	b
a	a	b
b	b	a

$\perp$	a	b
a	a	a
b	b	b

Definiciones y propiedades (continuación)

Estructura algebraica: Conjunto formado por elementos y donde hay definidas ciertas operaciones (internas) que satisfacen unas determinadas propiedades. Se llama estructura, y se escribe $(X, \star)$, al conjunto X junto con la operación $\star$

Nota: Un conjunto X con varias operaciones también forma una estructura algebraica $(X, \star, \dagger, \dots)$.

Posibles propiedades de una operación interna $\star$:
Sea X un conjunto no vacío y sea $\star$ una operación interna definida en X:

Asociativa: $(x \star y) \star z = x \star (y \star z) \equiv x \star y \star z \; \forall x, y, z \in X$

Conmutativa: $x \star y = y \star x \; \forall x, y \in X$

Distributiva: Si además de $\star$, X posee otra operación interna $\dagger$, o sea, $(X, \star, \dagger)$, se dirá que $\star$ es distributiva respecto a $\dagger$ si:
$x \star (y \dagger z) = (x \star y) \dagger (x \star z) \; \forall x, y, z \in X \quad (y \dagger z) \star x = (y \star x) \dagger (z \star x) \; \forall x, y, z \in X$

Elemento neutro: Un elemento $e \in X$ es neutro si $x \star e = e \star x = x \; \forall x \in X$
Nota: El elemento neutro puede existir o no, pero si $(X, \star)$ tiene elemento neutro e respecto de $\star$, entonces éste es único.

Elemento simétrico: Un elemento y es simétrico de x (y se denota por x') si $x \star x' = x' \star x = e$
Nota: Si un elemento tiene simétrico decimos que es simetrizable. En principio, un elemento puede tener más de un simétrico.

Elemento regular o simplificable: Un elemento $x \in X$ es un elemento regular si $x \star y = x \star z \Rightarrow y = z$ o $y \star x = z \star x \Rightarrow y = z \; \forall y, z \in X$
Nota: Todo elemento regular posee a lo más un simétrico. El cero no es regular.

Estructuras Algebraicas más importantes

Grupo: $(X, \star)$ es un grupo si $\star$ es asociativa, existe elemento neutro respecto a $\star$ y todo elemento de X tiene simétrico, o sea:
$\forall x \in X\ \exists! e \in X \mid e \star x = x \star e = x$
$\forall x \in X\ \exists! x' \in X \mid x \star x' = x' \star x = e$

Nota: Todos los elementos de X son regulares (al ser simetrizable). Si todos los elementos de un conjunto X son regulares, entonces se dice que se cumple la ley de cancelación o simplificación.

Propiedades adicionales: $(X, \star)$ es un conjunto conmutativo o abeliano si además de las propiedades de grupo verifica la propiedad conmutativa:
$\forall x, y \in X\ x \star y = y \star x$

Estructuras Algebraicas más importantes (continuación)

Anillo: Un anillo $(X, +, \cdot)$ es un conjunto $X \neq \emptyset$ dotado de dos operaciones internas denotadas por $+$ y $\cdot$ tales que:

- $(X, +)$ es un grupo
- $(X, \cdot)$ es un semigrupo
- Propiedad distributiva del producto respecto de la suma: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \; \forall x, y, z \in X$

Propiedades adicionales:

- $(X+, \cdot)$ es un *anillo conmutativo o abeliano* si la operación $\cdot$ verifica la propiedad conmutativa: $\forall x, y \in X \; x \cdot y = y \cdot x$
- $(X+, \cdot)$ es un *anillo con identidad o unitario* si posee elemento neutro con respecto a $\cdot$, o sea, $\exists! e \in X \mid x \cdot e = e \cdot x = x \; \forall x \in X$ (se denomina unidad del anillo y se denota por 1)
- El conjunto formado por los elementos invertibles de X, o sea, $X'^{*} = \left\{x \neq 0 \in X \mid \exists x^{-1} \in X\right\}$ es un grupo respecto de $\cdot$ al que se llama grupo multiplicativo de X
- *Divisores de cero*: dos elementos $x, y \in X$ son divisores de cero si y sólo si siendo $x \neq 0$ y $y \neq 0 \Rightarrow x \cdot y = 0$ o $y \cdot x = 0$
- Si $x \in X$ es invertible, entonces x no es divisor de cero
- $x \in (X, +, \cdot)$ es regular si y sólo si no es 0 ni divisor de cero. Análogamente, x es divisor de cero si y sólo si no es regular para el producto.
- $(X, +, \cdot)$ es un *anillo íntegro (o anillo de integridad)* cuando no tiene divisores de cero, o sea, si $\forall x, y \in X \; x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ o $y = 0$
- $(X, +, \cdot)$ es un *dominio de integridad* si es un anillo de integridad, unitario y conmutativo.

Estructuras Algebraicas más importantes (continuación)

Cuerpo: Un conjunto X dotado de dos operaciones, $+$ y $\cdot$, se dirá que es un cuerpo si $(X, +, \cdot)$ es un anillo con identidad y todo elemento distinto de cero tiene inverso respecto al producto, esto es:

- $(X, +)$ es un grupo (o bien $(X, +, \cdot)$ es un anillo)
- $(X^*, \cdot)$ es un grupo (todo elemento de X salvo el neutro de $+$ tiene su inverso para $\cdot$)
- Propiedad distributiva del producto: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z\ \forall x, y, z \in X$

Propiedades:

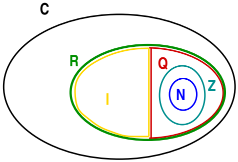
- Todo cuerpo tiene al menos dos elementos: $\{0, 1\}$
- Si $(X, \cdot)$ es un grupo conmutativo, el cuerpo se dirá conmuntativo.
- Un cuerpo $(X, +, \cdot)$ es un anillo unitario y, como todo elemento tiene inverso, no existen divisores de cero (anillo integro). Así, si S es un cuerpo conmutativo, X es un dominio de integridad

Estructuras Algebraicas más importantes (continuación)

Extensión de $\mathbb{N}$: $(\mathbb{N}, +)$ no es un grupo porque no tiene elemento simétrico, ¿cómo extenderlo para convertirlo en grupo? $x + n = m$ con $n, m \in \mathbb{N}$ no siempre tiene solución en $\mathbb{N}$. Para que sí la tenga se añaden las soluciones (o raíces) $x = m - n$ a $\mathbb{N}$, obteniendo $\mathbb{Z} = \{n - m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$, siendo así $(\mathbb{Z}, +)$ un grupo.

Extensión de $\mathbb{Z}$: Un procedimiento para construir a partir de un dominio de integridad $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ un nuevo anillo donde todos sus elementos poseen inverso es resolver la ecuación $x \cdot q = p$ con $q \neq 0$ y $q \in \mathbb{Z}$ y añadir sus raíces a $\mathbb{Z}$, obteniéndose así $\mathbb{Q} = \{p/q \mid q \neq 0, p, q \in \mathbb{Z}\}$. En este caso se obtiene $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, que es un cuerpo. Los números racionales son pues las raíces de las ecuaciones polinómicas de grado 1.

Extensión de $\mathbb{Q}$: Existen ecuaciones polinómicas de segundo grado que no tienen raíces racionales pero existen cuerpos (extensiones de $\mathbb{Q}$) donde las anteriores tienen solución. El cuerpo óptimo en el que toda ecuación polinómica tiene raíz es $\mathbb{C}$, que se construye en dos etapas: a) no algebraica ($\mathbb{R}$, completitud); 2) algebraica ($\mathbb{C}$), donde $\mathbb{C} = \mathbb{R}(\sqrt{-1}) = \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Así $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es cerrado.



Importante

En este curso de Álgebra, el cuerpo de escalares con el que trabajaremos habitualmente será el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, siendo los resultados fácilmente extrapolables al cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$

1.2 Matrices y Determinantes

Matrices: Definiciones

- Llamamos matriz de orden o dimensión $n \times m$ sobre el cuerpo conmutativo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ a todo conjunto de $n \times m$ elementos de $\mathbb{R}$ dispuestos en n filas y m columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{n,m}$$

donde a_{ij} será el elemento de la fila i y de la columna j. Denotaremos el conjunto de las matrices $n \times m$ por $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$.

- Diremos que una matriz es ***rectangular*** $n \neq m$ y diremos que es ***cuadrada*** si $n = m$, es decir, tiene el mismo número de filas que de columnas.
- Diremos que es una ***matriz fila*** si $n = 1$, y una *matriz columna* si $m = 1$.
- Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, su ***diagonal principal*** es el conjunto de los elementos de la forma (a_{ii}) donde $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Llamaremos ***traza*** de una matriz a la suma de los elementos de la diagonal principal $Traza\,(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -9 \\ 3 & 8 & 4 & 5 \\ -5 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad Traza\,(A) = 12$$

Matrices: Definiciones (continuación)

- **Matriz traspuesta:** Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ definimos la matriz transpuesta como aquella que se obtiene intercambiando las filas de la matriz A por columnas, la denotamos por $A^t \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -8 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -8 \\ 8 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- $\left(A^t\right)^t = A$
- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(\lambda A)^t = \lambda A^t$
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
- Sea A una matriz cuadrada entonces $A + A^t$ y $A \cdot A^t$ son simétricas y $A - A^t$ es antisimétrica.
- Toda matriz simétrica se puede descomponer de forma única como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica de modo único:

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^t + A - A^t\right) = \frac{1}{2}\left(A + A^t\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^t\right)$$

Matrices: Definiciones (continuación)

- **Matriz Diagonal:** los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son todos nulos.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- **Matriz Triangular superior** (respectivamente **triangular inferior**): todos los elementos situados por debajo (respectivamente por encima) de la diagonal principal son todos nulos

$$T_{\text{sup}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad T_{\text{inf}} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$T_S = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad T_I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Matrices: Definiciones (continuación)

- **Matriz Simétrica**: coinciden los elementos situados simétricamente respecto a la diagonal principal: $a_{ij} = a_{ji} \qquad$ para todo $i, j = 1, 2, \ldots, n$

Ejemplo

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

- **Matriz Antisimétrica**: los elementos situados simétricamente respecto a la diagonal principal son opuestos: $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo $i, j = 1, 2, \ldots, n$ y, por tanto, los elementos de la diagonal principal de una matriz antisimétrica son todos nulos.

Ejemplo

$$A_S = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Matriz unidad**: matriz diagonal compuesta por unos en su diagonal principal

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices: Operaciones (Suma y Producto por un escalar)

- **Igualdad:** Diremos que las matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ son iguales si

$$a_{ij} = b_{ij} \qquad \text{para todo } i = 1, 2, \dots, n\ , j = 1, 2, \dots, m$$

- **Suma:** Dadas dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, definimos la suma de $A + B$ como aquella matriz C cuyos elementos son de la forma

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \text{para todo } i = 1, 2, \dots, n\ , j = 1, 2, \dots, m$$

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 9 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -9 \\ 9 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- **Producto por un escalar:** Definimos el producto de una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ como la matriz resultante de multiplicar cada elemento de A por el escalar λ

$$\lambda \cdot A = \left(\lambda a_{ij}\right)_{n,m}$$

Ejemplo

$$3\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & -3 \\ 0 & -6 & 9 \\ -12 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Matrices: Operaciones (Producto de matrices)

- **Producto de matrices:** Dadas dos matrices $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$, definimos el producto matricial de $A \cdot B$ como a la matriz $C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ de manera que el elemento c_{ij} de C es el la suma del producto de los elementos de la fila i de A con los elementos de la columna j de B.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$

Importante

El producto de matrices rectangulares no es conmutativo, e incluso cuando las matrices son cuadradas el producto no tiene por que ser conmutativo.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA + bD & aB + bE & aC + bF \\ cA + dD & cB + dE & cC + dF \\ eA + fD & eB + fE & eC + fF \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 & -3 & -4 \\ 14 & 20 & -1 & -10 \end{pmatrix}$$

Determinantes: Definiciones

Matriz adjunta asociada a un elemento Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ se denomina **matriz adjunta del elemento que ocupa el lugar (i,j)**, es decir, que se encuentra en la fila i y columna j, a la matriz que se obtiene eliminando la fila i y la columna j de la matriz dada y se denota por A_{ij}.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -8 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, & A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}, & A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \\ A_{21} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, & A_{22} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}, & A_{23} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \\ A_{31} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, & A_{22} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & A_{23} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Menor complementario a un elemento Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ se denomina **menor complemetario del elemento** a_{ij} al determinante de su matriz adjunta, es decir, $|A_{ij}|$

Adjunto asociado a un elemento Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ se denomina **adjunto o cofactor del elemento** a_{ij} al determinante de su matriz adjunta multiplicada por $(-1)^{i+j}$, es decir, $c_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$

Determinantes: Definiciones (continuación)

Determinante de una matriz de orden 2 Dada una matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de orden 2 definimos su determinante y lo denotaremos por $|A|$ como:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Determinante de una matriz de orden 3 Dada una matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ de orden 3 definimos su determinante como: $|A| = a_{11}\,|A_{11}| - a_{12}\,|A_{12}| + a_{13}\,|A_{13}|$

Determinante de una matriz de orden n Dada una matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ definimos su determinante como: $|A| = a_{11}\,|A_{11}| - a_{12}\,|A_{12}| + a_{13}\,|A_{13}| + \cdots + (-1)^{1+n}\,a_{1n}\,|A_{1n}|$

Importante

En la definición que acabamos de dar desarrollamos el determinante a través de la primera fila sumando los productos de cada elemento por su menor complementario, pero *se puede desarrollar a través de los elementos de cualquier fila o columna* y los menores complementarios respectivos.

Determinantes: Propiedades

Propiedades principales:

- **Si B es una matriz que se obtiene a partir de una matriz A multiplicando por un número real $\lambda \in \mathbb{R}$ una de sus filas o columnas se tiene que**

$$|B| = \lambda\,|A|$$

- **Si B es una matriz que se obtiene a partir de una matriz A sumando un múltiplo de una fila (o columna) a otra fila de A (o columna) se tiene**

$$|B| = |A|$$

- **Si B es una matriz que se obtiene intercambiando dos filas o columnas de una matriz A se tiene que**

$$|B| = -\,|A|$$

Ejemplos

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\cdot 1 & -1 & 0 \\ 3\cdot(-1) & 1 & 2 \\ 3\cdot 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\,|A|$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = |A|$ ya que $F_{3,B} = F_{3,A} + 2F_{2,A}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\,|A|$

Determinantes: Propiedades (continuación)

Propiedades secundarias:

- Si una matriz tiene una fila de ceros, su determinante es nulo.
- Si una matriz tiene dos filas iguales su determinantes es nulo.
- El determinante de una matriz triangular superior o inferior es el producto de los elementos de su diagonal.
- El determinante de toda matriz cuadrada coincide con el de su transpuesta

$$|A| = \left|A^t\right|$$

- El determinante de un producto de matrices cuadradas del mismo orden es el producto de los determinantes

$$|AB| = |A|\,|B|$$

Determinantes: Propiedades (continuación)

- $|C| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+b_{j1} & a_{j2}+b_{j2} & \cdots & a_{jn}+b_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A| + |B|$ para $j = 1, 2, \ldots, n$.
- Si una matriz tiene todos los elementos de una fila (o columna), supongamos por ejemplo la fila i, nulos excepto el que ocupa el lugar j, se tiene que $|A| = (-1)^{i+j}\, a_{ij} \left|A_{ij}\right|$

Importante

El cálculo de un determinante se simplifica si lo desarrollamos por una fila (o columna) que contenga el mayor número de ceros posible.

Si la matriz no posee ningún elemento nulo se pueden realizar operaciones elementales (sumar a una fila o columna un múltiplo de otra, intercambiar filas o columnas, o multiplicar una fila o columna por un número distinto de cero) de manera que el determinante no cambie y la nueva matriz posea varios ceros en alguna de sus filas o columnas. Combinando operaciones elementales simplificamos el cálculo del determinante.

Determinantes: Propiedades (continuación)

Ejemplo

Calcular el deteminante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{=}{F_2 - 2F_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{=}{F_3 + F_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{=}{\text{(desarrollo por la primera columna)}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{=}{C_3 - 2C_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{=}{\text{(desarrollo por la segunda fila)}} (-2) \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-3 + 6) = -6$$

Matrices elementales y Matrices equivalentes

Sea la matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, se pueden realizar operaciones elementales con las filas de la matriz A obteniendo de este modo una nueva matriz. En el caso de que A sea cuadrada e invertible gracias a estas transformaciones elementales podremos calcular la matriz inversa, diagonalizarla u obtener a partir de ella una matriz triangular superior o inferior. Las operaciones elementales que podemos hacer con las filas de una matriz son las siguientes:

1. Multiplicar una fila por un número diferente de cero.
2. Sumar un múltiplo de una fila con otra fila.
3. Permutar filas.

Matriz Elemental Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ se llama elemental si se puede obtener a partir de la matriz identidad, $\mathbb{I}_n$, mediante una sola operación elemental.

Ejemplos

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{5F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \rightleftarrows F_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matrices elementales y Matrices equivalentes (continuación)

Teorema:

Toda matriz elemental es invertible. La inversa de una matriz elemental es a su vez elemental.

Matriz equivalente por filas (o por columnas): Sea la matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, cualquier matriz B obtenida mediante operaciones elementales sobre las filas (columnas) de A se denomina matriz equivalente de A.

Si realizamos p operaciones elementales sobre las filas de A para obtener la matriz B, que pueden representarse por las matrices elementales E_1, E_2, ..., E_p podemos escribir $B = E_p \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A$
Si las operaciones para obtener B se han realizado sobre las columnas de A tendremos que $B = A \cdot E_1 \cdot E_2 \cdots E_p$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_1 \rightleftharpoons F_2}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_2 - 2F_1}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_3 + F_1}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{3}F_2}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_3 - F_2}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Las matrices elementales utilizadas son

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo tanto: $B = E_5 \cdot E_4 \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A$

Matrices elementales y Matrices equivalentes (continuación)

Matriz escalonada: Definiendo el pivote de la fila i de una matriz A como el elemento a_{ij} tal que $a_{ij} \neq 0$ y $a_{ik} = 0 \; \forall k < j$ (o sea, todos los elementos a la izquierda de un pivote son nulos), se denomina *matriz escalonada por filas* a una matriz que cumple que para cualquier fila i, si a_{ij} es su pivote entonces $a_{ij} = 1$ y, además, si a_{ij} es el pivote de la fila i y a_{kl} es el pivote de la fila k se cumple que $j < l, \; \forall i < k$ (o sea, los pivotes de las filas inferiores siempre están más a la derecha que los de las superiores). Por lo tanto, una matriz escalonada por filas es:

$$\begin{pmatrix}
\boxed{1} & * & * & * & * & * & * \\
0 & \boxed{1} & * & * & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & & \\
\vdots & \vdots & & 0 & \boxed{1} & * & * \\
 & & & \vdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & \dots & & & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Una matriz escalonada por columnas será aquella cuya traspuesta sea escalonada por filas.

Matrices elementales y Matrices equivalentes (continuación)

Matriz canónica de equivalencia por filas La matriz C_f es la *matriz canónica de equivalencia por filas* de A si es escalonada por filas, se obtiene a partir de A mediante operaciones elementales sobre filas y, para cualquier fila i, si $a_{ij} = 1$ es su pivote entonces $a_{kj} = 0, \ \forall k \neq j$ (o sea, todos los elementos de esa columna son nulos salvo a_{ij} que vale 1). Por lo tanto:

$$C_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & 0 & 1 & * & * \\ & & & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(De manera similar se puede definir la matriz canónica de equivalencia por columnas)

Matriz canónica de equivalencia Una matriz C se denomina matriz canónica de equivalencia de A si es una matriz canónica de equivalencia por filas y por columnas, por lo tanto, la estructura de C será la de una matriz que contiene una submatriz identidad de orden r y el resto de submatrices son nulas $C = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

Se puede obtener la matriz canónica de equivalencia de una matriz A realizando operaciones elementales sobre las filas (columnas) para obtener la matriz canónica de equivalencia por filas (columnas) y, posterioremente, sobre las columnas (filas) para obtener la matriz canónica de equivalencia

Matriz inversa: Definiciones

Matriz Regular Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ cuadrada se dice **inversible**, **regular** o **no singular**, si existe una matriz $A^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ que verifica

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{I}_n$$

Si A no es inversible, se dice **singular** o **no regular**.
A la matriz A^{-1} se le llama **matriz inversa** de A.

Teorema

Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es inversible si y sólo si su determinante no es nulo $|A| \neq 0$

Vamos a calcular la matriz inversa a través de determinantes y utilizando un algoritmo de Gauss-Jordan, que demostraremos en la siguiente sección de este tema.

Matriz Adjunta Definimos la **matriz adjunta** de una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ a aquella formada de sustituir cada elemento a_{ij} por su respectivo adjunto o cofactor (recordemos que $c_{ij} = (-1)^{i+j}\left|A_{ij}\right|$)

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriz inversa: Definiciones (continuación)

Definición

Cuando calculamos el producto $A \cdot (Adj\,(A))^t$ obtenemos $A \cdot (Adj\,(A))^t = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = |A|\ \mathbb{I}_n$

Por tanto, definimos la **matriz inversa** como:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

es decir, la matriz adjunta transpuesta dividida por el determinante de la matriz A.

Ejemplo

Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ tenemos $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2$ y $Adj(A) = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 6 & 7 & -5 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$A \cdot (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -4 & 7 & -2 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = |A|\ \mathbb{I}_3$

Matriz inversa: Propiedades

1. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es inversible entonces su inversa es única
2. Si A y $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ son inversibles entonces

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

3. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es inversible

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$$

4. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es inversible entonces su matriz canónica de equivalencia es la matriz identidad $\mathbb{I}_n$

Matriz inversa: Cálculo mediante operaciones elementales (algoritmo de Gauss-Jordan)

Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es inversible se puede calcular su inversa, A^{-1}, realizando operaciones elementales sobre las filas de una matriz por bloques construída mediante la matriz A y la matriz identidad $\mathbb{I}_n$, $(A|\ \mathbb{I}_n)$, de modo que si reducimos el bloque de la izquierda (la matriz A) hasta obtener la matriz identidad mediante operaciones elementales, en el bloque de la derecha habremos obtenido la matriz inversa A^{-1}

$$(A|\ \mathbb{I}_n) \xrightarrow{\text{operaciones elementales}} (\mathbb{I}_n|\ A^{-1})$$

(en la siguiente sección haremos una demostración práctica de este procedimiento)

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ vamos a obtener su inversa mediante el métdo el algoritmo de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \rightleftharpoons \frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2F_1,F_3-3F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3/2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_2,-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5/2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_3,F_1-F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 7/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5/2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -2 & 7/2 & -1 \\ 1 & -5/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Rango de una matriz

Rango Definimos el rango de una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ como el orden de la mayor submatriz cuadrada de la matriz A con determinante no nulo.

De forma equivalente veremos en la próxima sección que se puede definir el rango como el mayor número de filas (o columnas) linealmente independientes de la matriz A.

Propiedades:

1. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ entonces $rang(A) \leq \min(n, m)$.
2. $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ tiene rango máximo si $rang(A) = \min(n, m)$.
3. $rang(A) = rang\left(A^t\right)$.
4. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y es invertible entonces $rang(A) = n$.
5. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ si intercambiamos dos filas (o dos columnas) de A, o multiplicamos una fila (o una columna) por un escalar no nulo, o, le sumamos una fila un múltiplo de otra (o a una columna un múltiplo de otra), entonces el rango de la matriz resultante no varía. Por lo tanto, el rango de una matriz no varía si realizamos operaciones elementales con sus filas o con sus columnas.

EJERCICIOS

1. Calcular el siguiente determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$

2. Calcular el siguiente determinante reduciéndolo a una matriz triangular superior mediante operaciones elementales: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

3. Calcular el siguiente determinante usando sus propiedades y efectuando un número reducido de computaciones $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

4. Hallar la inversas de la siguiente matriz, calculando primero la matriz de cofactores: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

5. Encontrar los valores de a para que la matriz siguiente sea inversible: $\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$

6. Calcular el rango de la siguiente matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

EJERCICIOS: Aplicaciones a la Criptografía

El mundo de las telecomunicaciones y las nuevas tecnologías de la información se interesa cada vez más por la transmisión de mensajes encriptados que sean difíciles de desencriptar por otros, en caso de ser interceptados, pero que se decodifiquen con facilidad por quienes los reciben. Hay muchas formas interesantes de cifrar o encriptar mensajes, y en su mayor parte usan la teoría de números o el álgebra lineal. Describiremos aquí un método que es eficaz, en especial cuando se usa una matriz de gran tamaño. En los ejercicios trabajemos con matrices pequeñas para evitar grandes cálculos manuales.
Comenzaremos con una matriz M invertible, que sólo la conocen quienes trasmiten y quienes reciben el mensaje, por ejemplo, $M = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Y supongamos que se desea encriptar el mensaje: ATTACK NOW.
Reemplazamos cada letra por el número que le corresponde a su posición en el alfabeto (A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z) y representamos un espacio por 0.
El mensaje anterior se ha convertido en la sucesión de números 1, 20, 20,1, 3, 11, 0, 14, 15, 23, que agrupamos en una sucesión de vectores columna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 \\ 23 \end{pmatrix}$$

y multiplicamos por M por la izquierda:

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 20 & 3 & 0 & 15 \\ 20 & 1 & 11 & 14 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77 & -56 & 35 & 56 & 47 \\ 39 & -18 & 19 & 28 & 31 \end{pmatrix}$$

Con lo que el mensaje cifrado que se enviará es 77, 39, -56, -18, 35, 19, 56, 28, 47, 31. Para desencriptar el mensaje quien lo recibe debe calcular M^{-1},

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

y multiplicar por los números recibidos agrupados en una sucesión de vectores columna igual que antes, obtenemos el mensaje original.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 77 & -56 & 35 & 56 & 47 \\ 39 & -18 & 19 & 28 & 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 20 & 3 & 0 & 15 \\ 20 & 1 & 11 & 14 & 23 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS: Criptografía

1. Para aquellos alumnos que estén cursando la asignatura de Álgebra, os voy a dar un breve pero importante consejo para poder aprobar la asignatura:

   $$1, 9, 10, 22, 24, 43, 16, 37, 53, 24, 36, 56, 16, 28, 44, 37, 17, 34, 21, 18, 20, 25, 18, 31, 1, 20, 20$$

   Para que este mensaje sea accesible a todos, solamente comentar que el mensaje ha sido encriptado basándose en el método anterior mediante la matriz

   $$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

   pero utilizando el alfabeto español (la misma asignación anterior, pero incluyendo nuestra querida Ñ). Ayuda a tus compañeros y desencriptar el mensaje.
2. Un alumno de la Universidad Complutense de Madrid, que cursa la asignatura de Álgebra, ha conseguido interceptar un mensaje entre las profesoras de la asignatura sobre el examen parcial. El mensaje es

   $$9, 7, 32, 28, 21, 19, 38, 38, 86, 58, 32, 32, 82, 50, 38, 38, 56, 24, 40, 40, 95, 57, 79, 53$$

   Sabe que el mensaje ha sido encriptado con una matriz cuadrada 2×2, y sospecha que al final del mensaje aparece la firma de una de las profesoras: RRSM. Ayuda a tus compañeros y desencripta el mensaje.

1.3 Sistemas de ecuaciones lineales

Definiciones

Sistema de ecuaciones lineales Llamaremos *sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas* a un sistema de ecuaciones de la forma

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &=& b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots && \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &=& b_m \end{array}\right\}$$

que escrito de forma matricial es $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

o abreviadamente $AX = B$

siendo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{m\times n}$ la matriz de coeficientes,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n\times 1}$ el vector de incógnitas y $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{m\times 1}$ el vector de términos independientes

Ejemplo

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + 4x_2 + x_3 - 9x_4 &=& 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 5x_4 &=& 3 \\ -5x_1 - 3x_2 + x_4 &=& 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -9 \\ 3 & 8 & 4 & 5 \\ -5 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definiciones (continuación)

Importante

La resolución de un sistema consiste en averiguar si, dadas las matrices A y B, existe un vector solución X tal que $AX = B$ y, en caso afirmativo, si este vector es único. Por tanto, podemos clasificar los sistemas lineales según el siguiente criterio:

- **Sistema incompatible**, si carece de solución.
- **Sistema compatible determinado**, si existe solución y esta es única.
- **Sistema compatible indeterminado**, si existe más de una solución.

Notación

El nombre utilizado para las incógnitas se suele expresar en letras minúsculas usando generalmente x_1, x_2, $\dots x_n$ o utilizando las últimas letras del alfabeto $x, y, z, t\dots$

La matriz ampliada, A^* o $\overline{A}$ o $(A\ |B)$, es la que se obtiene cuando a la matriz de coeficientes se le añade una columna a la derecha incluyendo el vector de términos independientes. Se suele separar dicha columna con una línea vertical

$$A^* = (A\ |B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Sistemas de ecuaciones equivalentes

Sistemas equivalentes Dos sistemas se dicen equivalentes si sus conjuntos de soluciones coinciden.

Propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales En relación con esta definición se pueden demostrar las siguientes propiedades de los sistemas lineales:

1. Si multiplicamos cualquiera de las ecuaciones de un sistema lineal por un escalar, obtenemos otro sistema equivalente.
2. Si se intercambia la posición de dos ecuaciones, el sistema resultante es equivalente.
3. Si a una ecuación se le suma otra multiplicada por un número real cualquiera, el sistema resultante es equivalente.

Como consecuencia de estas propiedades, si observamos que una ecuación es combinación lineal* de cierto número de ecuaciones del sistema, al suprimir esa ecuación obtendremos un sistema equivalente, ya que al restar a dicha ecuación la combinación lineal obtendríamos una ecuacion nula. Si no es posible obtener una ecuación como combinación lineal de otras, diremos que dichas ecuaciones son linealmente independientes.

* Una combinación lineal de un conjunto de m ecuaciones es una nueva ecuación obtenida sumando cada una de las m ecuaciones multiplicada por un escalar.

Resolución de sistemas lineales: Método de Gauss-Jordan

El ***método de resolución de ecuaciones de Gauss-Jordan***, llamado así en honor a Carl Friedrich Gauss y Wilhelm Jordan que fueron los primeros en establecer el algoritmo*, permite no sólo resolver estos sistemas basándose en propiedades de equivalencia, sino, al mismo tiempo, conocer si son compatibles determinados, indeterminados, o incompatibles.
En primer lugar calculamos el sistema escalonado equivalente y podemos encontrarnos con distintos resultados:

Sistema escalonado equivalente de un sistema de tres ecuaciones $AX = B$

	Matriz escalonada de A	**Matriz escalonada de A^***	
Ejemplo A	$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & 1 & a'_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & a'_{12} & a'_{13} & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & b'_3 \end{array}\right)$	Compatible determinado
Ejemplo B	$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ 0 & 1 & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & 1 & a'_{34} \end{pmatrix}$	$\left(\begin{array}{cccc\|c} 1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & a'_{24} & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & a'_{34} & b'_3 \end{array}\right)$	Compatible indeterminado
Ejemplo C	$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ 0 & 1 & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\left(\begin{array}{cccc\|c} 1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & a'_{24} & b'_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$	Incompatible

* Para ser precisos, es necesario reconocer que el método de eliminación de Gauss fue descrito y propuesto por primera vez en China en el siglo II a.C. en el libro titulado Los nueve capítulos sobre el arte matemático (Jiǔzhāng suànshù)

Resolución de sistemas lineales: Método de Gauss-Jordan (continuación)

- En un sistema ***compatible determinado*** el número de filas linealmente independientes de la matriz de coeficientes es igual al número de filas linealmente independentes de la matriz ampliada y coincide con el número de incógnitas del sistema (ejemplo A).
- En un sistema ***compatible indeterminado***, aunque el número de filas linealmente independientes en la matriz de coeficientes y en la matriz ampliada es el mismo, este es menor que el número de incógnitas (ejemplo B).
- Por último, en un sistema ***incompatible*** el número de filas linealmente independientes de la matriz de coeficientes es menor que el número de filas linealmente independientes de la matriz ampliada (ejemplo C).

Posteriormente a la obtención de la matriz escalonada, se puede continuar el procedimiento de resolución del sistema, intentando, de nuevo mediante operaciones elementales sobre filas, la diagonalización de la matriz ampliada o de la obtención del mayor número posible de elementos nulos por encima la diagonal principal de la matriz de coeficientes (matriz canónica equivalente por filas). De este modo, en cada fila aparecería una expresión sencilla que permitiría obtener la solución del sistema. Por ejemplo, las matrices de los ejemplos anteriores quedarían de la siguiente forma:

Sistema canónico equivalente de un sistema de tres ecuaciones $AX = B$

	Matriz canónica equivalente de A	**Matriz canónica equivalente de A^***	
Ejemplo A	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & 0 & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & b'_3 \end{array}\right)$	Compatible determinado
Ejemplo B	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a'_{14} \\ 0 & 1 & 0 & a'_{24} \\ 0 & 0 & 1 & a'_{34} \end{pmatrix}$	$\left(\begin{array}{cccc\|c} 1 & 0 & 0 & a'_{14} & b'_1 \\ 0 & 1 & 0 & a'_{24} & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & a'_{34} & b'_3 \end{array}\right)$	Compatible indeterminado
Ejemplo C	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a'_{13} & a'_{14} \\ 0 & 1 & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\left(\begin{array}{cccc\|c} 1 & 0 & a'_{13} & a'_{14} & 0 \\ 0 & 1 & a'_{23} & a'_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$	Incompatible

Algoritmo de Gauss-Jordan para cálculo de matrices inversas (repaso)

Repaso (ejemplo)

Vamos a utilizar el procedimiento descrito para calcular la matriz inversa de una matriz dada y demostrar de forma práctica el algoritmo de Gauss-Jordan de cálculo de matrices inversas.

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, buscamos una matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tal que $A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}$, por lo tanto

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+z & t+y \\ 2x+3z & 3t+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así que tenemos dos sistemas de ecuaciones de dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{ll} x+z & =1 \\ 2x+3z & =0 \end{array}\right\} \text{y} \quad \left.\begin{array}{ll} y+t & =0 \\ 2y+3t & =1 \end{array}\right\}, \text{ cuyas matrices asociadas son } \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \text{ y } \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Como se puede ver, ambos sistemas tienen la misma matriz de coeficientes, sólo se diferencian en los términos independientes. Si resolvemos estos sistemas mediante el método de Gauss, las operaciones elementales que tenemos que hacer para obtener la matriz escalonada serán las mismas:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ z=-2 \end{array}\right. \\ \Rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} y=-1 \\ t=1 \end{array}\right. \end{array}\right\} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si combinamos los dos sistemas de ecuaciones, podemos resumir el procedimiento en que inicialmente tenemos $(A \mid \mathbb{I})$ y mediante operaciones elementales obtenemos $(\mathbb{I} \mid A^{-1})$, dando lugar a la matriz inversa de A.

Teorema de Rouché-Fröbenius

Basándonos en los resultados anteriores podemos concluir que el rango de la matriz ampliada A^* coincide con el número de ecuaciones linealmente independientes del sistema. Comparando este rango con el de la matriz de coeficientes A (que es el número filas linealmente independientes de A) podemos describir cómo son las soluciones del sistema.

Teorema de Rouché-Fröbenius

Sea un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas, cuya matriz de coeficientes es A y cuya matriz ampliada es A^*, tendremos que:

- El sistema es **compatible** si y sólo si $rang\,(A) = rang\,(A^*)$. En este caso se distingue entre:
  - **Determinado** (tiene solución única) si $rang\,(A) = n$
  - **Indeterminado** (tiene infinitas soluciones) si $rang\,(A) < n$, con $n - rang\,(A)$ parámetros libres
- El sistema es **incompatible** (no tiene solución) si y sólo si $rang\,(A) < rang\,(A^*)$

Otros métodos de resolución: matriz inversa

Cuando tenemos un sistema de ecuaciones en el cual el número de incógnitas es igual al número de ecuaciones entonces, el sistema será compatible determinado si y sólo si el rango coincide con el número de incógnitas, lo que significa que todas las filas son independientes y, por lo tanto, el determinante de la matriz A del sistema es no nulo.

Procedimiento de resolución mediante la matriz inversa

Si tenemos un sistema de ecuaciones $AX = B$ con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, cuya matriz de coeficientes A cumple que

$$|A| \neq 0$$

en ese caso, podremos calcular la matriz inversa de A, por tanto la solución del sistema $AX = B$ es:

$$X = A^{-1}B$$

Si $|A| = 0$ entonces el sistema será incompatible o compatible indeterminado dependiendo del rango de la matriz ampliada y no podremos utilizar este procedimiento para resolver el sistema.

Otros métodos de resolución: regla de Cramer

Otro método de resolución es la *regla de Cramer* basada en propiedades de los determinantes.
Veamos el caso particular de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r} ax+by=e_1 \\ cx+dy=e_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & b & e_1 \\ c & d & e_2 \end{array}\right)$$

Resolviendo por el método de Gauss llegamos a la siguiente matriz triangular: $\left(\begin{array}{cc|c} a & b & e_1 \\ 0 & ad-bc & ae_2-ce_1 \end{array}\right)$

De modo que, después de un pequeño cálculo, obtenemos que:

$$y=\frac{ae_2-ce_1}{ad-bc}=\frac{\begin{vmatrix} a & e_1 \\ c & e_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} a & e_1 \\ c & e_2 \end{vmatrix}}{|A|} \text{ y } x=\frac{de_1-be_2}{ad-bc}=\frac{\begin{vmatrix} e_1 & b \\ e_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} e_1 & b \\ e_2 & d \end{vmatrix}}{|A|}$$

Por lo que este método será válido si $|A|\neq 0$, o sea, si el sistema es compatible determinado.

Regla de Cramer

Generalizando para un sistema de n ecuaciones con n incógnitas compatible determinado. Si definimos

$$B_i=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad i=1,2,\ldots,n$$

la matriz resultante de cambiar en la matriz del sistema la columna i-ésima por la columna de términos independientes, entonces

$$x_i=\frac{|B_i|}{|A|}, \quad i=1,2,\ldots,n$$

Sistemas lineales homogéneos

Un sistema lineal homogéneo es aquel cuyos términos independientes son nulas, así que es de la forma

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow AX = 0$$

Sabemos que **todo sistema homogéneo posee la solución trivial** $X = (0, 0, 0, \ldots, 0)$ **, y por tanto es compatible**.

Soluciones de un sistema homogéneo

Dado un sistema homogéneo $AX = 0$ se cumple que:

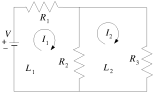
- Si $|A| \neq 0$ el sistema es compatible determinado y sólo posee la solución trivial $X = (0, 0, \ldots, 0)$
- Si $|A| = 0$ el sistema es compatible indeterminado y posee infinitas soluciones. En este caso:
  - Si X es una solución del sistema homogéneo ($AX = 0$) y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces λX es también solución del sistema, ya que $A(\lambda X) = \lambda (AX) = \lambda 0 = 0$
  - Si X e Y son soluciones del sistema homogéneo ($AX = 0$ y $AY = 0$), entonces $X + Y$ es solución del sistema, ya que $A(X + Y) = AX + AY = 0 + 0 = 0$.

EJERCICIOS

1. Resolver mediante el método de eliminación de Gauss $\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 6 \\ 2x + y - 3z = -3 \\ x - 3y + 3z = 10 \end{array}\right\}$
2. Estudiar la compatibilidad en función de los valores que pueden tomar el parámetro a:
$\left.\begin{array}{r} a^2x + y + z = 3 \\ x + a^2y + z = 4 - a \\ x + y + a^2z = 2 + a^2 \end{array}\right\}$
3. Resolver el sistema $AX = B$ empleando la matriz inversa de A
$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

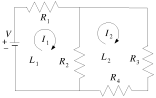
EJERCICIOS: Sobre circuitos eléctricos

Una aplicación frecuente de los sitemas de ecuaciones lineales es a circuitos eléctricos donde se suele conocer el voltaje de la fuerza electromotriz V (que por lo general es una batería o generador) y los ohmnios R de las resistencias y se quiere calcular la intensidad I de las corriente que circulan por cada segmento del circuito.
La intensidad de las corrientes y las caídas de voltaje en un circuito eléctrico se rigen por las Leyes de Kirchhoff:
LEY DE KIRCHHOFF DE LA CORRIENTE: La suma algebráica de todas las corrientes en cualquier nodo es cero.
LEY DE KIRCHHOFF DEL VOLTAJE: La suma algebráica de todos los cambios de potencial a lo largo de las resistencias del circuito IR es igual a la suma algebraica de las fuentes de voltaje V.
Para cada elemento en el circuito hay que elegir una dirección positiva para medir la corriente que pasará a través de dicho elemento. Las elecciones se indican con flechas. Para la fuente de voltaje V se toma como positivo el sentido del polo negativo al positivo. Dicha elección condicionará también el signo de los cambios de potencial en las resistencias. El cambio de potencial a través de las resistencias será positivo cuando dicho cambio se mida en el mismo sentido que la corriente, y negativo en el caso contrario.



Ejemplo:
En el bucle L_1 tenemos: $(R_1 + R_2)\, I_1 - R_2 I_2 = V$
En el bucle L_2: $(R_2 + R_3)\, I_2 - R_2 I_1 = 0$

- Calcular las corrientes I_1, I_2 en el circuito eléctrico de la figura de abajo si el voltaje de la batería es $V = 6$ V y las resistencias son $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $R_3 = 4\Omega$, $R_4 = 2\Omega$.



Definiciones

Espacio vectorial

Un conjunto V, cuyos elementos se denotan mediante $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, ..., se dice que es un **espacio vectorial** sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ (si $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ se dice que es un *espacio vectorial real* y si $\mathbb{K}$ es $\mathbb{C}$ se dice que es un *espacio vectorial complejo*), si en él se han definido dos operaciones:

- *Suma*, $+$, que es una operación interna de manera que a cada par de elementos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de V se le hace corresponder el elemento $\vec{u}+\vec{v}$ de V, denominado suma de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y
- *Producto por un escalar*, que es una operación externa, de manera que a todo elemento $\vec{u}$ de V y a todo elemento α de $\mathbb{K}$ se le hace corresponder el elemento $\alpha\vec{u}$ de V,

que satisfacen las siguientes propiedades:

($S1$) (Conmutativa) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ para todo $\vec{u}$, $\vec{v}$ de V .

($S2$) (Asociativa) $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ para todo $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de V.

($S3$) (Elemento neutro) Existe un elemento de V, designado por $\vec{0}$ y denominado neutro, tal que $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$ para todo $\vec{u}$ de V.

($S4$) (Elemento opuesto) Para todo $\vec{u}$ de V existe un elemento, designado por $-\vec{u}$ y denominado opuesto de $\vec{u}$, tal que $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$.

($M1$) (Elemento unidad) $1\vec{u}=\vec{u}$ para todo $\vec{u}$ de V, donde 1 denota el elemento unidad de $\mathbb{K}$.

($M2$) (Asociativa) $\alpha\,(\beta\vec{u})=(\alpha\beta)\,\vec{u}$ para todo $\vec{u}$ de V y todo α, β de $\mathbb{K}$.

($M3$) (Distributiva respecto a la suma de escalares) $(\alpha+\beta)\,\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$ para todo $\vec{u}$ de V y todo α, β de $\mathbb{K}$.

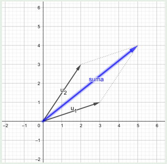
($M4$) (Distributiva respecto a la suma de vectores) $\alpha\,(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$ para todo $\vec{u}$, $\vec{v}$ de V y todo α de $\mathbb{K}$

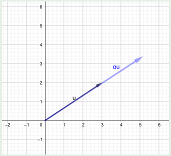
Por lo tanto, el conjunto V, con la operación suma $(V,+)$ es un grupo abeliano o conmutativo.

Definiciones (continuación)

Ejemplos

- $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\mathbb{R}\right)$ es un espacio vectorial donde está definidas las operaciones $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  Se cumple que dados $\vec{u}_1 = (x_1, y_1)$, $\vec{u}_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que
  $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2$, y dados $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple que
  $\alpha\vec{u} = (\alpha x, \alpha y) \in \mathbb{R}^2$





- $(P_n[x], +, \cdot\mathbb{R})$ donde $P_n[x]$ son los polinomios en x de grado menor o igual que n también es un espacio vectorial
- $(\mathcal{M}_{m\times n}, +, \cdot\mathbb{R})$ donde $\mathcal{M}_{m\times n}$ son las matrices de m filas y n columnas también es un espacio vectorial

Definiciones (continuación)

Dependencia e Independencia lineal Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$; un número finito de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_n$ se dicen que son **linealmente dependientes** si existe n elementos de $\mathbb{K}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ no todos nulos, tal que:

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \alpha_3\vec{u}_3 + \ldots + \alpha_n\vec{u}_n = \vec{0} \tag{1}$$

Si los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_n$ no son linealmente dependientes, se dice que son **linealmente independientes** (LI); por tanto, los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_n$ son LI si cualquier igualdad como la que aparece en (1) implica que todos los elementos de $\mathbb{K}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, son nulos.

Todo conjunto finito de vectores linealmente independientes no puede contener un subconjunto de vectores que sean linealmente dependientes.

Combinación lineal Diremos que $\vec{v}$ es combinación lineal de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_n$ si existen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, elementos de $\mathbb{K}$ no todos nulos, tales que:

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \alpha_3\vec{u}_3 + \ldots + \alpha_n\vec{u}_n$$

Definiciones (continuación)

Ejemplo

Comprobad si las siguientes matrices son linealmente independientes

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Construimos una combinación lineal y la igualamos a la matriz nula, lo que da lugar a un sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} \alpha + 2\beta & = & 0 \\ \beta - \gamma & = & 0 \\ 3\alpha + \beta + 5\gamma & = & 0 \\ -\alpha - 2\gamma & = & 0 \\ 2\alpha - \beta + 5\gamma & = & 0 \\ \alpha + \beta + \gamma & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Escalonando la matriz de coeficientes podemos ver si sólo tiene la solución trivial ($\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$) o si tiene infinitas soluciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang(A) = 2 < 3 = \text{nº incognitas}$$

El sistema es compatible indeterminado, hay más soluciones que la trivial y por lo tanto las tres matrices son linealmente dependientes: podemos escribir una de ellas como combinación lineal de las otras.
De la solución parametrizada del sistema anterior podemos ver que $\alpha = -2\lambda$, $\beta = \lambda$, $\gamma = \lambda$.
Por lo tanto: $-2\lambda A + \lambda B + \lambda C = 0 \Rightarrow C = 2A - B$

Sistema de generadores y bases

Sistema de generadores Un conjunto finito de vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_k\}$ de un espacio vectorial V se dice que es un **sistema de generadores** de V si todo elemento de V se puede escribir como una combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_k$.

Base de un espacio vectorial Un conjunto finito de vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_k\}$ se dice que es una base de un espacio vectorial V si se cumplen las dos siguientes condiciones:

1. Los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_k$ son linealmente independientes.
2. Todo elemento de V es una combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_k$.

Observad que cualquier base de V es un sistema de generadores de V.

Si V es un espacio vectorial que posee una base con n elementos, entonces $n+1$ vectores de V son siempre linealmente dependientes. De manera más general, en un espacio vectorial V que posea una base con n elementos, entonces cualquier conjunto de m vectores de V, con $m > n$, son linealmente dependientes.

Importante

Todas las bases de un mismo espacio vectorial V poseen el mismo número de elementos.

Sistemas de generadores y bases (continuación)

Ejemplo

Comprobad que el siguiente conjunto $\mathcal{S} = \left\{x^2 + x, x^3 - 2, x^2 - x, x + 1, x^2 - x\right\}$ es un sistema generador del espacio vectorial $P_3[x]$ (polinomios de grado menor o igual que 3) y, sin embargo, no es una base. Después seleccionad un subconjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}$ que sea base de $P_3[x]$

Elegimos un vector genérico $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in P_3[x]$ y lo escribimos como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{S}$:

$$\alpha\left(x^2 + x\right) + \beta\left(x^3 - 2\right) + \gamma\left(x^2 - x\right) + \delta\,(x+1) + \epsilon\left(x^2 - x\right) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \Rightarrow$$

$$\beta x^3 + (\alpha + \gamma + \epsilon)\,x^2 + (\alpha - \gamma + \delta - \epsilon)\,x + (-2\beta + \delta) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcl} & \beta & & & & = & a_3 \\ \alpha & & +\gamma & & +\epsilon & = & a_2 \\ \alpha & & -\gamma & +\delta & -\epsilon & = & a_1 \\ & -2\beta & & +\delta & & = & a_0 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrrr|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & a_2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & a_1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & a_0 \end{array}\right) = (A|B)$$

El sistema tiene solución si $rang(A) = 4$, que es el número de ecuaciones que tienen que satisfacerse, y que corresponde a la dimensión de $P_3[x]$, ya que significaría que cualquier $p(x) \in P_3[x]$ se puede escribir como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{S}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_1 \rightleftharpoons F_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_3 - F_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_4 + 2F_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang(A) = 4$$

Además, en este caso como hay cinco incógnitas, el sistema será compatible indeterminado (no habrá solución única), por lo que el conjunto $\mathcal{S}$ será generador, pero no base. Para construir una base tenemos que seleccionar cuatro elementos de $\mathcal{S}$ que sean linealmente independientes y como vemos que las cuatro primeras columnas son linealmente independientes (ya que la matriz equivalente escalonada tiene los pivotes en las cuatro primeras columnas) una posible base de $P_3[x]$ será $\mathcal{B} = \left\{x^2 + x, x^3 - 2, x^2 - x, x + 1\right\}$

Sistemas de generadores y bases (continuación)

Dimensión de un espacio vectorial El número de elementos que posee una base cualquiera de un espacio vectorial V recibe el nombre de *dimensión* de V, $\dim(V)$.

Dado un vector $\vec{v}$ de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ y dada una base $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_n\}$ de dicho espacio vectorial, sabemos que $\vec{v} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \ldots + a_n\vec{u}_n$, con $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$.

Componentes de un vector Los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tales que $\vec{v} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \ldots + a_n\vec{u}_n$ donde $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_n\}$ es una base de V, se denominan **componentes** o **coordenadas** de $\vec{v}$ en la base $\mathcal{B}$, y lo representamos como

$$C_{\mathcal{B}}[\vec{v}] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Importante

Las componentes de un vector respecto de una base son únicas.

Definición

La **base canónica** de un espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ viene dada por $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $\vec{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$.
De forma similar se puede definir la base canónica de cualquier espacio vectorial.

Sistemas de generadores y bases (continuación)

Ejemplo

Dado el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ comprobad que $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ es una base y encontrad las coordenadas de $M=\begin{pmatrix}3&-1\\0&2\end{pmatrix}$ en la base canónica $\mathcal{B}_C$ y en la base $\mathcal{B}$

La base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es $\mathcal{B}_C=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ por eso las coordenadas de M en $\mathcal{B}_C$ son: $C_{\mathcal{B}_C}[M]=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\2\end{pmatrix}$

Como la dimensión de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es 4, para que $\mathcal{B}$ sea base, basta con demostrar que sus elementos son linealmente independientes:

$$\alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\alpha-\delta=0\\\gamma+\delta=0\\\beta=0\\\alpha+\beta=0\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow \text{como}\begin{vmatrix}1&0&0&-1\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\1&1&0&0\end{vmatrix}\neq 0 \text{ quiere}$$

decir que las cuatro matrices son linealmente independientes y, por lo tanto, $\mathcal{B}$ es una base.
Las coordenadas de M en la base $\mathcal{B}$ la obtendremos resolviendo el sistema

$$\alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1\\0&2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\alpha-\delta=3\\\gamma+\delta=-1\\\beta=0\\\alpha+\beta=2\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&3\\0&0&1&1&-1\\0&1&0&0&0\\1&1&0&0&2\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\rightleftharpoons F_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&3\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&-1\\1&1&0&0&2\end{array}\right)\xrightarrow{F_4-F_1-F_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&3\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&-1\\0&0&0&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1+F_4,F_3-F_4}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&2\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&-1\end{array}\right)$$

Por lo tanto, $M=2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow C_{\mathcal{B}}[M]=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$

Sistemas de generadores y bases (continuación)

Nota

Dados dos vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ de un espacio vectorial V de dimensión n representados mediante sus coordenadas $C_{\mathcal{B}}[\vec{u}_1] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y $C_{\mathcal{B}}[\vec{u}_2] = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ en una base $\mathcal{B}$, cualquier combinación lineal de dichos vectores de la forma $\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2$ da lugar un nuevo vector $\vec{v}$ del espacio vectorial V cuyas coordenadas en la base $\mathcal{B}$ son la combinación lineal de las coordenadas de los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ en la base $\mathcal{B}$, por lo tanto, $C_{\mathcal{B}}[\vec{v}] = \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta b_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n + \beta b_n \end{pmatrix}$

Importante

Las coordenadas de un vector en una base $\mathcal{B}$ de un espacio vectorial V de dimensión n se comportan como vectores del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, esto permite considerar **isomorfos** a los espacios V y $\mathbb{R}^n$ y trabajar con cualquier espacio vectorial V de dimensión n como si fuera $\mathbb{R}^n$

Ejemplos

El espacio vectorial de las matrices $\mathcal{M}_{3\times 2}$ es isomorfo de $\mathbb{R}^6$
El espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3, $P_3[x]$, es isomorfo de $\mathbb{R}^4$

EJERCICIOS

1. Dados los vectores $a = (1, 1)$, $b = (2, 1)$ y $c = (1, 2)$ de $\mathbb{R}^2$
   - Comprobar que forman un sistema de generadores.
   - Comprobar que son linealmente dependientes.

2. En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$ se consideran las matrices:
   $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   Prueba que son linealmente independientes.

3. Probar que el conjunto $\mathcal{B} = \{(2, 3), (0, 2)\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y hallar las coordenadas del vector $(5, -1)$ respecto de la base $\mathcal{B}$.

4. Sabiendo que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, y $\vec{w}$ son linealmente independientes, probar que los vectores $\vec{u}$, $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ también lo son.

5. Demostrar que el conjunto de polinomios $\mathcal{B} = \left\{1, x, x^2, x^3\right\}$ es una base de $P_3[x]$, conjunto de polinomios de grado menor o igual a 3. Probar que $\mathcal{B}' = \left\{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\right\}$ también es una base de $P_3[x]$.

6. Expresar el polinomio $2x^3 - 3x^2 + 5x - 6 \in P_3[x]$ como combinación lineal de los elementos de la base de $P_3[x]$ dada por $\left\{1, 1-x, x+x^2, x^2+x^3\right\}$.

Cambio de base entre la base canónica y una genérica

Supongamos que tenemos dos bases de un espacio vectorial V

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_C &= \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\} \text{ (base canónica)} \\ \mathcal{B} &= \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\} \end{aligned}$$

Dado cualquier vector $\vec{w} \in V$ lo podemos expresar como una combinación lineal de cada una de las bases:

$\vec{w} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n = x'_1\vec{u}_1 + x'_2\vec{u}_2 + \ldots + x'_n\vec{u}_n$ donde $C_{\mathcal{B}_C}[\vec{w}] = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $C_{\mathcal{B}}[\vec{w}] = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ son las coordenadas de $\vec{w}$ en las bases $\mathcal{B}_C$ y $\mathcal{B}$, respectivamente, ambas escritas como matrices columna. Por lo que

$$\vec{w} = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \ldots \ \vec{e}_n)\, C_{\mathcal{B}_C}[\vec{w}] = (\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \ldots \ \vec{u}_n)\, C_{\mathcal{B}}[\vec{w}] \tag{2}$$

Sabemos además que los vectores de la base $\mathcal{B}$ se pueden expresar como combinación lineal de los vectores de la base $\mathcal{B}_C$:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= u_{11}\vec{e}_1 + u_{12}\vec{e}_2 + \ldots + u_{1n}\vec{e}_n \\ \vec{u}_2 &= u_{21}\vec{e}_1 + u_{22}\vec{e}_2 + \ldots + u_{2n}\vec{e}_n \\ &\vdots \\ \vec{u}_n &= u_{n1}\vec{e}_1 + u_{n2}\vec{e}_2 + \ldots + u_{nn}\vec{e}_n \end{aligned}$$

donde los correspondientes $C_{\mathcal{B}_C}[\vec{u}_i] = \begin{pmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ \vdots \\ u_{in} \end{pmatrix}$ son las coordenadas del vector $\vec{u}_i$ en la base $\mathcal{B}_C$.

Cambio de base entre $\mathcal{B}_C$ y $\mathcal{B}$ (continuación)

Esto último se puede expresar en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vdots \\ \vec{u}_n \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix} \text{ con } U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \tag{3}$$

por tanto, con (3) y usando las propiedades de las matrices transpuestas, tenemos que

$$(\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \ldots\ \vec{u}_n) = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \ldots\ \vec{e}_n)\, U^t \tag{4}$$

donde la columna i de la matriz U^t son las coordenadas en la base canónica del vector $\vec{u}_i$ de la base $\mathcal{B}$.
Sustituyendo en la expresión (2) lo obtenido en (4) tenemos que :

$$\vec{w} = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \ldots\ \vec{e}_n)\, C_{\mathcal{B}_C}[\vec{w}] = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \ldots\ \vec{e}_n)\, U^t C_{\mathcal{B}}[\vec{w}]$$

luego $C_{\mathcal{B}_C}[\vec{w}] = U^t C_{\mathcal{B}}[\vec{w}]$. Es decir, U^t es la matriz que nos permite pasar coordenadas de la base $\mathcal{B}$ a coordenadas de la base canónica $\mathcal{B}_C$, por lo que la denominaremos $U^t = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}_C}$ y escribiremos

$$C_{\mathcal{B}_C}[\vec{w}] = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}_C} \cdot C_{\mathcal{B}}[\vec{w}] \tag{5}$$

De igual modo, la inversa de la matriz $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}_C}$ nos permitirá pasar de la base $\mathcal{B}_C$ a la base $\mathcal{B}$, de modo que tendremos $\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}_C}\right)^{-1} = M^{\mathcal{B}_C}_{\mathcal{B}}$ y, multiplicando la expresión (5) por la izquierda por $M^{\mathcal{B}_C}_{\mathcal{B}}$ podremos escribir

$$C_{\mathcal{B}}[\vec{w}] = M^{\mathcal{B}_C}_{\mathcal{B}}\, C_{\mathcal{B}_C}[\vec{w}] \tag{6}$$

Cambio de base entre $\mathcal{B}_C$ y $\mathcal{B}$ (continuación)

Matrices de cambio de base

- La matriz $M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}}$ que tiene como columnas las coordenadas en la base canónica $\mathcal{B}_C$ de los vectores de la base $\mathcal{B}$ nos permite transformar las coordenadas de cualquier vector de la base $\mathcal{B}$ a la base canónica $\mathcal{B}_C$
- La matriz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_C}$ que tiene como columnas las coordenadas en la base $\mathcal{B}$ de los vectores de la base canónica $\mathcal{B}_C$ nos permite transformar las coordenadas de cualquier vector de la base canónica $\mathcal{B}_C$ a la base $\mathcal{B}$
- Se cumple que $M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}} = \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_C}\right)^{-1}$

Cambio de base entre $\mathcal{B}_C$ y $\mathcal{B}$ (continuación)

Ejemplo

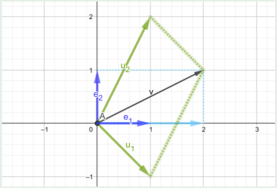
Dado el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$y la base $\mathcal{B} = \left\{\vec{u}_1 = (1, -1)\,, \vec{u}_2 = (1, 2)\right\}$, calculad las matrices de cambio de base desde la base canónica $\mathcal{B}_C$ a la base $\mathcal{B}$ y viceversa. Obtened las coordenadas del vector $\vec{v} = (2, 1)$ en la base canónica $\mathcal{B}_C$ y en la base $\mathcal{B}$.

La matriz que tiene por columnas las coordenadas de los elementos de $\mathcal{B}$ en la base canónica $\mathcal{B}_C$ es $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}_C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y permite pasar de las coordenadas en $\mathcal{B}$ a las coordenadas en $\mathcal{B}_C$. La matriz inversa $M^{\mathcal{B}_C}_{\mathcal{B}} = \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}_C}\right)^{-1}$ permite el paso de $\mathcal{B}_C$ a $\mathcal{B}$ y, calculando dicha inversa tenemos $M^{\mathcal{B}_C}_{\mathcal{B}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Las coordenadas de $\vec{v}$ en la base canónica son $C_{\mathcal{B}_C}[\vec{v}] = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, y en la base $\mathcal{B}$ son

$C_{\mathcal{B}}[\vec{v}] = M^{\mathcal{B}_C}_{\mathcal{B}} C_{\mathcal{B}_C}[\vec{v}] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{\mathcal{B}}[\vec{v}] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Esto significa que $\vec{v} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, donde $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$ son los vectores de la base canónica y $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ los vectores de la base $\mathcal{B}$



Cambio de base entre $\mathcal{B}_C$ y $\mathcal{B}$ (continuación)

Ejemplo

Dado el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$y la base $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1 = (1,1,0), \vec{u}_2 = (1,0,3), \vec{u}_3 = (0,-1,2)\}$, calculad las matrices de cambio de base desde la base canónica $\mathcal{B}_C$ a la base $\mathcal{B}$ y viceversa. Obtened las coordenadas del vector $\vec{v} = (2,-1,4)$ en la base canónica $\mathcal{B}_C$ y en la base $\mathcal{B}$.

La matriz que tiene por columnas las coordenadas de los elementos de $\mathcal{B}$ en la base canónica $\mathcal{B}_C$ es

$$M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

y permite pasar de las coordenadas en $\mathcal{B}$ a las coordenadas en $\mathcal{B}_C$.

La matriz inversa $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_C} = \left(M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}}\right)^{-1}$ permite el paso de $\mathcal{B}_C$ a $\mathcal{B}$ y, calculando dicha inversa tenemos

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_C} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Como las coordenadas del vector $\vec{v}$ en la base canónica son $C_{\mathcal{B}_C}[\vec{v}] = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, podemos calcular las coordenadas de $\vec{v}$ en la base $\mathcal{B}$ como

$$C_{\mathcal{B}}[\vec{v}] = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_C} C_{\mathcal{B}_C}[\vec{v}] = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{\mathcal{B}}[\vec{v}] = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Por lo que $\vec{v} = 4\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + 5\vec{u}_3$

Cambio de base entre dos bases genéricas

Supongamos ahora que tenemos dos bases, $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, ninguna de las cuales es la canónica. Tendremos las matrices $M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1}$ y $M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_2}$ que nos permite pasar de $\mathcal{B}_1$ a la canónica $\mathcal{B}_C$ y de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_C$, respectivamente, y $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_C} = (M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1})^{-1}$ y $M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_C} = (M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_2})^{-1}$ que nos permite pasar de $\mathcal{B}_C$ a las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, respectivamente. Supongamos que conocemos las coordenadas $C_{\mathcal{B}_1}[\vec{w}]$ de un vector $\vec{w}$ en la base $\mathcal{B}_1$ y queremos saber cuáles son sus coordenadas en la base $\mathcal{B}_2$, $C_{\mathcal{B}_2}[\vec{w}]$.

Primero pasamos de la base $\mathcal{B}_1$ a la canónica $\mathcal{B}_C$ multiplicando por $M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1}$:

$$C_{\mathcal{B}_C}[\vec{w}] = M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1} C_{\mathcal{B}_1}[\vec{w}]$$

Ahora pasamos de $\mathcal{B}_C$ a $\mathcal{B}_2$ multiplicando por $M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_C}$:

$$C_{\mathcal{B}_2}[\vec{w}] = M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_C} C_{\mathcal{B}_C}[\vec{w}] = M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_C} M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1} C_{\mathcal{B}_1}[\vec{w}]$$

Así pues, **la matriz que permite pasar de coordenadas de $\mathcal{B}_1$ a coordenadas de $\mathcal{B}_2$ es**

$$M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} = M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_C} M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1}$$

Si queremos pasar de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$ multiplicamos por la inversa:

$$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \left(M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}\right)^{-1} = \left(M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_C} M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1}\right)^{-1} = \left(M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1}\right)^{-1} \left(M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_C}\right)^{-1} = M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_C} M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_2}$$

por lo que

$$C_{\mathcal{B}_1}[\vec{w}] = M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_C} M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_2} C_{\mathcal{B}_2}[\vec{w}] = M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} C_{\mathcal{B}_2}[\vec{w}]$$

Cambio de base entre $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$

Ejemplo

Considérense las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1 = (1,-2), \vec{u}_2 = (3,-4)\}$, $\mathcal{B}_2 = \{\vec{v}_1 = (1,3), \vec{v}_2 = (3,8)\}$.
Determinad la matriz de cambio de base desde $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$,$M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$, y la de desde $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$, $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$

La matriz de cambio de base $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_C$ es $M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ y la cambia desde $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_C$ es

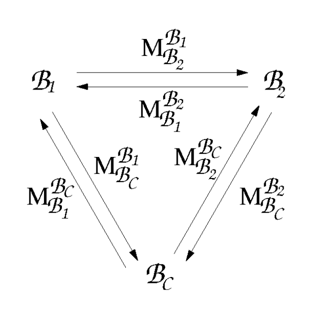
$$M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} = M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_C} M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -14 & -36 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$

La matriz de cambio de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$ es $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \left(M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -14 & -36 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & -18 \\ \frac{5}{2} & 7 \end{pmatrix}$

Cambios de base (Resumen)

Resumen



EJERCICIOS

1. Demostrar que los siguientes conjuntos son base de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 &= \{\vec{v}_1 = (1,1,0,0), \vec{v}_2 = (0,1,0,0), \vec{v}_3 = (0,0,1,1), \vec{v}_4 = (0,0,1,1)\} \\ \mathcal{B}_2 &= \{\vec{u}_1 = (1,2,0,0), \vec{u}_2 = (0,1,2,-1), \vec{u}_2 = (1,-1,-1,-1), \vec{u}_4 = (0,1,1,0)\}\end{aligned}$$

   Encontrar las componentes del vector $\vec{v} = 3\vec{v}_1 - \vec{v}_3 + 2\vec{v}_2$ respecto a la base $\mathcal{B}_2$ y respecto de la base canónica.

2. Calcula la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ para las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$:
   $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(-1,1,1),(0,1,2)\}, \quad \mathcal{B}' = \{(2,1,1),(0,0,1),(-1,1,1)\}$

3. Calcular las coordenadas del vector $p(x) = -1 + 6x - 8x^2$ respecto de la base $\mathcal{B} = \left\{1 + 2x + 2x^2, 2x - x^2, -1 - 2x\right\}$

4. Calcular la matriz del cambio de base M que pasa de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ a la base $\mathcal{B}$ que surge de girar 90^o alrededor del eje z y en sentido contrario a las agujas del reloj los vectores de la base canócica. Determinar las coordenadas del vector $\vec{v} = (1,1,1)$ respecto de la nueva base.

5. Supóngase que los ejes x e y en el plano $\mathbb{R}^2$ se giran 45^o en el sentido contrario de las agujas del reloj, de forma que el nuevo eje x' esté a lo largo de la recta $x = y$ y el nuevo eje y' a lo largo de la recta $x = -y$. Encontrar:
   - La matriz de cambio de base.
   - Las nuevas coordenadas del punto $A(5,6)$ bajo la rotación dada.

6. El vector $\vec{v}_1 = (1,3,0)$ tiene coordenadas $C_{\mathcal{B}}[\vec{v}_1] = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ en la base $\mathcal{B}$, el vector $\vec{v}_2 = (3,8,0)$ tiene coordenadas $C_{\mathcal{B}}[\vec{v}_2] = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ y $\vec{v}_3 = (0,1,1)$ tiene coordenadas $C_{\mathcal{B}}[\vec{v}_3] = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Hallar los tres vectores que forman la base $\mathcal{B}$.

Tema 2: Espacios Vectoriales

Definiciones

Subespacio vectorial Un subespacio vectorial de un espacio vectorial V es un subconjunto S de V, que a su vez es un espacio vectorial con las operaciones definidas en V.

Importante

Para demostrar que un subconjunto es un subespacio vectorial no es necesario comprobar de nuevo que satisface todas las propiedades de espacio vectorial. En realidad, es suficiente demostrar las dos condiciones siguientes:

1. Para todo $\vec{u}, \vec{v} \in S$ se cumple que $\vec{u} + \vec{v} \in S$.
2. Para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y para todo $\vec{u} \in S$ se cumple que $\alpha\vec{u} \in S$.

Estas dos últimas condiciones son equivalentes a demostrar que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y para todo $\vec{u}$ y $\vec{v} \in S$

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in S.$$

Subespacio engendrado Sea $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_k\}$ un subconjunto del espacio vectorial V, el subconjunto de vectores de V que se forma mediante todas las combinaciones lineales de los elementos de S es un subespacio de V. A este subespacio se le denomina subepacio engendrado por S y se denota por $\langle S\rangle = \mathcal{L}(S) = gen(S)$ y los vectores de S constituyen un sistema de generadores de $\mathcal{L}(S)$.

Definiciones (continuación)

Ejemplo

Dados los siguientes conjuntos, comprobar si son subespacios vectoriales:

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y + z = 0\right\} \text{ y } S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | a \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) Consideremos dos vectores pertenecientes a S_1: $\begin{cases} \vec{u}_1 = (x_1, y_1, z_1) \in S_1 \Rightarrow x_1 - y_1 + z_1 = 0 \\ \vec{u}_2 = (x_2, y_2, z_2) \in S_2 \Rightarrow x_2 - y_2 + z_2 = 0 \end{cases}$

Calculamos ahora una combinación lineal de ambos:
$\vec{v} = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2 = \alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$
Para comprobar si el vector obtenido pertenece a S_1 calculamos
$x - y + z = (\alpha x_1 + \beta x_2) - (\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2) = \alpha(x_1 - y_1 + z_1) + \beta(x_2 - y_2 + z_2) = 0$, por lo tanto
$\vec{v} = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{v}_2 \in S_1$, así que S_1 es un subespacio de $\mathbb{R}^3$

(b) Consideramos ahora dos matrices de S_2: $\begin{cases} A_1 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \in S_2 \\ A_2 = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \in S_2 \end{cases}$

Calculamos una combinación lineal de estas matrices:
$\alpha A_1 + \beta A_2 = \alpha \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta b & \alpha + \beta \\ 0 & -\alpha a - \beta b \end{pmatrix}$. Como el elemento de la primera fila segunda columna no es igual a 1 ($\alpha + \beta \neq 1$), la matriz obtenida no pertenecerá a S_2, por lo que S_2 no es un subespacio de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

Definiciones (continuación)

Importante

Dado un subespacio vectorial $\mathcal{S}$ de un espacio vectorial V (por lo tanto, $\mathcal{S} \subset V$) con $\dim(\mathcal{S}) = m \leq \dim(V) = n$ podemos describir dicho subespacio de dos formas diferentes:

1. Expresión explícita o parámetrica: Las componentes de los elementos de $\mathcal{S}$ se escriben como combinación lineal de los elementos de una base de $\mathcal{S}$ y, por tanto, dependen de m parámetros libres.
2. Expresión implícita o cartesiana: Las componentes de los elementos de $\mathcal{S}$ deben cumplir un sistema de $n - m$ ecuaciones lineales homogéneas independientes.

Nota

Todo espacio vectorial V contiene al menos dos subespacios vectoriales denominados impropios: el propio espacio vectorial V y el subespacio vectorial formado por el elemento nulo $\left\{\vec{0}\right\}$

Definiciones (continuación)

Ejemplo

Dado el conjunto de vectores $S=\{u_1=(1,2,-1)\,,u_2=(1,0,1)\,,u_3=(1,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$, calcular el subespacio que engendra y obtener la dimensión de este subespacio y una base.

Calculamos una combinación lineal de los vectores de S y la igualamos a un vector genérico $\vec{v}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ y esto nos permitirá ver qué caracteriza a los elementos del subespacio $\mathcal{S}$=L(S)

$$\alpha\vec{u}_1+\beta\vec{u}_2+\gamma\vec{u}_3=\vec{v}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&x\\2&0&1&y\\-1&1&0&z\end{array}\right)\overset{F_2-2F_1,F_3+F_1}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&x\\0&-2&-1&y-2x\\0&2&1&z+x\end{array}\right)\overset{F_3+F_2}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&x\\0&-2&-1&y-2x\\0&0&0&z+y-x\end{array}\right)$$

Según el resultado anterior, podemos ver que de los vectores de S solo hay dos linealmente independientes (solo hay dos pivotes en la matriz de coeficientes) y puesto que los pivotes están en las dos primeras columnas, correspondientes a los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$, estos pueden servir como base del subespacio y los vectores del subespacio se obtendrán como combinación lineal de estos dos vectores, así pues $\vec{v}=\alpha\vec{u}_1+\beta\vec{u}_2\Rightarrow\vec{v}=(\alpha+\beta,2\alpha,-\alpha+\beta)\Rightarrow$

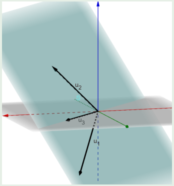
$$\mathcal{S}=\left\{(\alpha+\beta,2\alpha,-\alpha+\beta)\in\mathbb{R}^3|\alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$$

Esta es la **expresión explícita o paramétrica** (depende de dos parámetros) del subespacio vectorial S. La dimensión de $\mathcal{S}$ es $\dim(\mathcal{S})=2$, ya que depende de dos parámetros libres (tiene dos vectores en la base con los cuales se puede generar todo el subespacio).

Por otro lado, al obtener la matriz escalonada observamos que para que el sistema tenga solución es necesario que la matriz ampliada también tenga rango 2, lo que sucederá cuando $z+y-x=0$, por lo tanto, los vectores del subespacio $\mathcal{S}$ tienen que cumplir esta condición, así que podríamos escribir que

$$\mathcal{S}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|z+y-x=0\right\}$$

Esta es la **expresión implícita o cartesiana** del subespacio vectorial $\mathcal{S}$ (el subespacio está representado por una ecuación algebraica).



Dado que $\mathcal{S}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y $\dim(\mathcal{S})=2$ y $\dim(\mathbb{R}^3)=3$ se cumple que el número de parámetros de la expresión paramétrica de $\mathcal{S}$ es igual a la dimensión de $\mathcal{S}$ (#parámetros=$\dim(\mathcal{S})$) y el número de ecuaciones algebráicas (o restricciones) que definen $\mathcal{S}$ es la diferencia entre las dimensiones del espacio y del subespacio (#ecuaciones algebráicas=$\dim(\mathbb{R}^3)-\dim(\mathcal{S})$)

Suma e intersección de subespacios vectoriales

Suma e intersección de subespacios vectoriales Dados dos subespacios vectoriales S_1 y S_2 de un espacio vectorial V podemos definir:

- su **intersección**

$$S_1 \cap S_2 = \{\vec{u} \mid \vec{u} \in S_1 \text{ y } \vec{u} \in S_2\}$$

- y su **suma**

$$S_1 + S_2 = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \mid \vec{u}_1 \in S_1 \text{ y } \vec{u}_2 \in S_2\}$$

Estos dos subconjuntos de V también son subespacios vectoriales de V.

Proposición

Dados dos subespacios vectoriales S_1 y S_2 de un espacio vectorial V se cumple que:

$$\dim(S_1) + \dim(S_2) = \dim(S_1 + S_2) + \dim(S_1 \cap S_2)$$

Suma e intersección de subespacios vectoriales (continuación)

Ejemplo

Dados los subespacios $S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0\right\}$ y $S_2 = \{(\alpha, 2\beta, \alpha + \beta) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ calcular el subespacio intersección y el subespacio suma.

A partir de la expresión parametrizada de S_2 podemos encontrar una base de este subespacio (ej.: $\mathcal{B}(S_2) = \{(1, 0, 1), (0, 2, 1)\}$) y la expresión cartesiana de dicho subespacio:

$$(\alpha, 2\beta, \alpha + \beta) = (x, y, z) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & y \\ 1 & 1 & z \end{array}\right) \overset{F_3 - F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & y \\ 0 & 1 & z - x \end{array}\right) \overset{F_2 \rightleftharpoons F_3}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & z - x \\ 0 & 2 & y \end{array}\right) \overset{F_3 - 2F_2}{\rightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & z - x \\ 0 & 0 & 2x + y - 2z \end{array}\right) \Rightarrow 2x + y - 2z = 0$$

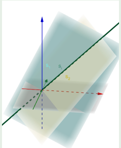
Con la expresión cartesiana de S_1, parametrizando las variables, podemos encontrar la expresión paramétrica de S_1, ya que si $z = \alpha, y = \beta \Rightarrow x = \alpha - \beta \Rightarrow S_1 = \{(\alpha - \beta, \beta, \alpha) \,|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Por lo tanto, una base de S_1 será $\mathcal{B}(S_1) = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$

Con las expresiones cartesianas de S_1 y de S_2 podemos escribir la expresión cartesiana de la intersección, puesto que la intersección debe cumplir ambas expresiones: $S_1 = S_1 \cap S_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0, 2x + y - 2z = 0\right\}$

Para obtener la expresión paramétrica de la intersección resolvemos el sistema de ecuaciones definido por las ecuaciones cartesianas

$$\left\{\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{F_2 - 2F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{-F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{F_1 - F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$(x, y, z) = (\alpha, 0, \alpha) \Rightarrow S_i = S_1 \cap S_2 = \left\{(\alpha, 0, \alpha) \in \mathbb{R}^3 | \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$



Podemos ver que $\dim(S_1) = 1$ y como se cumple que $\dim(S_1) + \dim(S_2) = \dim(S_1 \cap S_2) + \dim(S_1 + S_2) \Rightarrow \dim(S_1 + S_2) = 2 + 2 - 1 = 3 \Rightarrow S_1 + S_2 = \mathbb{R}^3$ ya que $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ y como la dimensión de la suma coincide con la del espacio total quiere decir que la suma es el espacio total (ya que es el único subespacio de dimensión 3 que hay en $\mathbb{R}^3$).

También podíamos haber comprobado que tomando como sistema generador de $S_1 + S_2$ la unión de las dos bases ($SG(S_1 + S_2) = \mathcal{B}(S_1) \cup \mathcal{B}(S_2)$), sólo hay tres vectores linealmente independientes.

Suma e intersección de subespacios vectoriales (continuación)

Suma directa Un espacio vectorial V es una suma directa de dos subespacios S_1 y S_2 si se cumple las dos siguientes condiciones:

1. $S_1 + S_2 = V$
2. $S_1 \cap S_2 = \left\{ \vec{0} \right\}$

Si esto se cumple se utiliza la notación $V = S_1 \oplus S_2$ y se dice que los subespacios S_1 y S_2 son suplementarios (o complementarios).

Nota

Si S_1 y S_2 son subespacios vectoriales de un espacio vectorial V, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $V = S_1 \oplus S_2$
2. Para todo $\vec{u} \in V$ existe una descomposición única de la forma $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ con $\vec{u}_1 \in S_1$ y $\vec{u}_2 \in S_2$.

Suma e intersección de subespacios vectoriales (continuación)

Ejemplo

Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0, y - z = 0\}$ y $W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = 0\}$, vamos a calcular $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$ y a comprobar si se verifica que $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^3$.

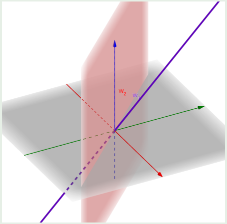
Para calcular el subespacio vectorial interesección $W_1 \cap W_2$ resolvemos conjuntamente las ecuaciones cartesianas de ambos subespacios:

$$\left\{\begin{array}{r} x=0 \\ y-z=0 \\ x+y=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{F_3-F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{F_3-F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{F_2+F_3}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow$$

$W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$

Puesto que $\dim(W_1) = 1$ (ya que está definido con dos ecuaciones cartesianas), $\dim(W_2) = 2$ (puesto que está definido por una ecuación cartesiana) y $\dim(W_1 \cap W_2) = 0 \Rightarrow \dim(W_1 + W_2) = 3 \Rightarrow W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$, por lo tanto $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

Podíamos también haber comprobado las dimensiones de W_1 y de W_2, obteniendo sus ecuaciones parámetricas y con ello una base de cada uno de ellos, que conjuntamente formarían un sistema generador de $W_1 + W_2$.



Para W_1: $\left\{\begin{array}{r} x=0 \\ y-z=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow (x,y,z) = (0,\alpha,\alpha) \Rightarrow \mathcal{B}(W_1) = \{(0,1,1)\}$

Para W_2: $x + y = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow (x,y,z) = (-\alpha,\alpha,\beta) \Rightarrow \mathcal{B}(W_2) = \{(-1,1,0),(0,0,1)\}$

Por lo tanto, $SG(W_1 + W_2) = \mathcal{B}(W_1) \cup \mathcal{B}(W_2)$, y como $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ quiere decir que los tres vectores son linealmente independientes, por lo que forman una base del subespacio suma, que tiene dimensión 3, lo que corrobora el resultado obtenido anteriormente de que $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$

EJERCICIOS

1. Comprobar si los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales:
   - $A = \{(x, 2x, z)\,|x, z \in \mathbb{R}\}$ (Ecuaciones paramétricas)
   - $B = \{(x, y, z)\,|x = z + 1\}$ (Ecuaciones cartesianas)
2. Sea el sistema $S = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ con $\vec{u} = (2, 1, 3)$, $\vec{v} = (-2, 1, 4)$ obtener las ecuaciones paramétricas y cartesianas del subespacio engendrado por S.
3. Demostrar que el conjunto de matrices de la forma $\left\{ \begin{pmatrix} a-3b & 4b \\ -4b & a+3b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2} | a, b \in \mathbb{R} \right\}$es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}$. Hallar una base de este subespacio y su dimensión.
4. Sea el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$, $V = \{(x, y, z, t)$ tal que $x + y - 2t = 0, x - y - z = 0\}$ calcular la dimensión, una base y las ecuaciones paramétricas.
5. Sea el subespacio vectorial $V = \{(0, a, b, a + 2b)$ tal que $a, b \in \mathbb{R}\}$. Determinar la dimensión, una base y las ecuaciones cartesianas del subespacio vectorial.
6. Determinar la dimensión, una base y las ecuaciones paramétricas y cartesianas del subespacio vectorial engendrado por los vectores $a = (1, 2, 0, 3)$, $b = (3, 1, -1, -1)$, $c = (-1, 3, 1, 7)$ y $d = (4, 3, -1, 2)$
7. Determinar a y b para que el vector (1,0,a,b) pertenezca al subespacio engendrado por $(1, 4, -5, 2)$ y $(1, 2, 3, -1)$.
8. Dados los subespacios vectoriales F, engendrado por los vectores $\{(1, 0, 2)\ , (2, 0, 4)\}$ y G determinado por las ecuaciones $2x + y + z = 0, x - y + 2z = 0$. Hallar la dimensión, una base y las ecuaciones paramétricas y cartesianas de los subespacios F, G, $F \cap G$ y $F + G$.
9. Consideremos los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:
   $F_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\right\}$, $F_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = y = 0\right\}$, $F_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0, y = z\right\}$
   - Probar que $\mathbb{R}^3 = F_1 + F_2 + F_3$.
   - Probar que $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \{\vec{0}\}$ y también que $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$, $F_1 \cap F_3 = \{\vec{0}\}$ y $F_2 \cap F_3 = \{\vec{0}\}$.
   - Buscar dos descomposiciones diferentes para $\vec{0}$ de la forma $\vec{0} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ con $\vec{v}_1 \in F_1, \vec{v}_2 \in F_2, \vec{v}_3 \in F_3$ (con lo que se demostrará que $\mathbb{R}^3$ no es suma directa de F_1, F_2 y F_3.
   - Comprobar (con la misma finalidad) que $(F_1 + F_2) \cap F_3 \neq \{\vec{0}\}$.
10. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios W_1 y W_2 engendrados, respectivamente, por los sistemas de vectores:
    $S_1 = \{(1, 0, 1, 0\}, (0, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1)\}$, $S_2 = \{(1, 0, 0, 0), (2, 1, 0, 1), (5, 1, 0, 1)\}$. Hallar:
    - Bases y dimensión de W_1 y W_2.
    - Ecuaciones y base de $W_1 + W_2$.
    - Ecuaciones y base de $W_1 \cap W_2$.

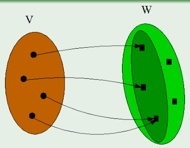
3.1 Aplicaciones Lineales

Introducción

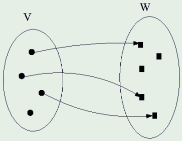
Aplicación Dados dos espacios vectoriales V y W se dice que f es una ***aplicación*** de V en W, y se representa por $f: V \longrightarrow W$, si f es una regla que asigna a cualquier elemento $\vec{v} \in V$ un único elemento $f(\vec{v}) = \vec{w} \in W$. Por lo tanto

$$\forall \vec{v} \in V \ \exists! \vec{w} \in W | f(\vec{v}) = \vec{w}$$

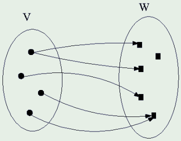
Ejemplo



Sí es aplicación



No es aplicación



No es aplicación

Nota

El conjunto inicial V de la aplicación se le llama dominio, el conjunto final W se denomina codominio, el elemento $\vec{w}$ tal que $f(\vec{v}) = \vec{w}$ se denomina imagen de $\vec{v}$ y el elemento $\vec{v} = f^{-1}(\vec{w})$ es origen (o preimagen) de $\vec{w}$, el conjunto de todas las imágenes de W (o sea, elementos que tienen origen) se denomina conjunto imagen (o recorrido o rango) de f, por lo que $Im(f) \subseteq W$

Aplicaciones Lineales

Aplicación lineal Dados V y W, espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, se dice que f es un ***homomorfismo o aplicación lineal*** de V a W si es una aplicación $f : V \to W$ tal que:

1. $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$
2. $f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y para todo $\vec{u} \in V$

Estas dos propiedades son equivalentes a decir que para todo α y $\beta \in \mathbb{K}$ y para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$ se tiene que:

$$f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$$

Propiedades

Una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ cumple las siguientes propiedades:

1. La imagen del elemento neutro de V es el elemento neutro de W:
   $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ donde $\vec{0}_V \in V$ es el elemento neutro de V y $\vec{0}_W \in W$ es el neutro de W
2. La imagen del elemento opuesto de un vector es el elemento opuesto de la imagen:
   $\forall \vec{v} \in V | \vec{w} = f(\vec{v}) \in W$, $f(-\vec{v}) = -\vec{w}$, de modo que $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}_V$ y $f(\vec{v}) + f(-\vec{v}) = \vec{w} + (-\vec{w}) = \vec{0}_W$
3. El conjunto de todas las imágenes de un subespacio S_V de V es un subespacio de W de dimensión menor o igual que el primero:
   Si $S_V \subseteq V$ es un subespacio de V, entonces $S_W = f(S_V) = \{\vec{w} = f(\vec{v}) \in W | \vec{v} \in S_V\} \subseteq W$ es subespacio de W con $\dim(S_W) \leq \dim(S_V)$

Aplicaciones Lineales (continuación)

Ejemplo

Dada la aplicación $f_1 : \mathcal{M}_{2\times 2} \longrightarrow P_2[x]$ tal que si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ tenemos $\vec{w} = f_1(A) = (a_{22} + a_{11})\, x^2 - a_{12} + a_{21}$ comprobad que es una aplicación lineal y, sin embargo, la aplicación $f_2 : \mathcal{M}_{2\times 2} \longrightarrow P_2[x]$ tal que si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ tenemos $\vec{w} = f_2(A) = a_{22}a_{11}x^2 - a_{12}a_{21}$ no lo es

Tomemos dos elementos genéricos de $\mathcal{M}_{2\times 2}$, por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, tenemos que

$C = \alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \beta b_{11} & \alpha a_{12} + \beta b_{12} \\ \alpha a_{21} + \beta b_{21} & \alpha a_{22} + \beta b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$

Como $f_1(A) = (a_{22} + a_{11})\, x^2 - a_{12} + a_{21}$, $f_1(B) = (b_{22} + b_{11})\, x^2 - b_{12} + b_{21}$ y

$f_1(C) = (c_{22} + c_{11})\, x^2 - c_{12} + c_{21} = (\alpha a_{22} + \beta b_{22} + \alpha a_{11} + \beta b_{11})\, x^2 - (\alpha a_{12} + \beta b_{12}) + \alpha a_{21} + \beta b_{21} =$
$\alpha \left((a_{22} + a_{11})\, x^2 - a_{12} + a_{21} \right) + \beta \left((b_{22} + b_{11})\, x^2 - b_{12} + b_{21} \right) = \alpha f_1(A) + \beta f_1(B)$ vemos que se cumple la condición para ser aplicación lineal ($f_1\,(\alpha A + \beta B) = \alpha f_1(A) + \beta f_1(B)$)

Si repetimos el procedimiento para la aplicación f_2 obtenemos que: $f_2(A) = a_{22}a_{11}x^2 - a_{12}a_{21}$, $f_2(B) = b_{22}b_{11}x^2 - b_{12}b_{21}$ y

$f_2(C) = c_{22}c_{11}x^2 - c_{12}c_{21} = (\alpha a_{22} + \beta b_{22})\,(\alpha a_{11} + \beta b_{11})\, x^2 - (\alpha a_{12} + \beta b_{12})\,(\alpha a_{21} + \beta b_{21}) \neq$
$(\alpha a_{22}a_{11} + \beta b_{22}b_{11})\, x^2 - (\alpha a_{12}a_{21} + \beta b_{12}b_{21}) = \alpha f_2(A) + \beta f_2(B)$, así que f_2 no es una aplicación lineal.

Aplicaciones Lineales (continuación)

Ejemplo

Dada la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & y-z \\ z & x \end{pmatrix}$, encontrar la imagen del subespacio $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x - y = 0\right\} \subset \mathbb{R}^3$ y analizar la dimensión del subespacio imagen.

Calculamos una base del subespacio V, como los elementos de V tienen que cumplir que $x - y = 0$, parametrizamos dicha ecuación y obtenemos que $\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{array} \right. \Rightarrow \mathcal{B}_V = \{\vec{v}_1 = (1,1,0), \vec{v}_2 = (0,0,1)\}$ con $\dim(V) = 2$

Para encontrar el subespacio imagen calculamos la imagen de los elementos de la base de V, que formarán un sistema generador del subespacio imagen $W = f(V) = \mathrm{img}(V) \subset \mathcal{M}_{2\times 2}$

$$\vec{w}_1 = f(\vec{v}_1) = f(1,1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_2 = f(\vec{v}_2) = f(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un sistema generador de W es $SG(W) = \left\{\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, como $\vec{w}_1$ y $\vec{w}_2$ son linealmente independientes, también serán una base de $W = f(V)$ por lo que

$$W = f(V) = \mathrm{img}(V) = \left\{\begin{pmatrix} 2\alpha & \alpha - \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2} | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\} \Rightarrow \dim(\mathrm{img}(V)) = 2$$

EJERCICIOS

1. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,2) = (2,3)$ y $f(0,1) = (1,4)$. Halla $f(x,y)$.
2. Estudiar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales entre los espacios vectoriales dados:
   - $f(x,y,z) = (x+y,z)$
   - $f(x,y) = (x+y,0)$
   - $f(x,y) = (x,y+2)$
   - $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \qquad f(A) = A + B$ donde $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ es fija
   - $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \qquad f(A) = AB - BA$ donde $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ es fija.
   - $f : P_n[x] \to P_n[x], \qquad f(p(x)) = p(x+1)$
   - $f : P_n[x] \to P_{n-1}[x], \qquad f(p(x)) = \dfrac{dp(x)}{dx}$
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es lineal, y se tiene que $f(1,2) = (-1,0,2)$ y $f(2,1) = (0,2,-1)$. Halla $f(3,3)$ y $f(0,-1)$.
4. Dadas $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(a,b) = (a, a+b, b)$, y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(a,b,c) = (a+b,c)$, calcular $f \circ g$ y $g \circ f$

3.2 Matriz asociada a una aplicación lineal

Tema 3: Aplicaciones Lineales

Transformación de los elementos de una base

Dados V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, con bases $\mathcal{B}_v = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ y $\mathcal{B}_w = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m)$, respectivamente, definimos $f : V \to W$ una aplicación lineal entre estos espacios vectoriales.

Cualquier elemento $\vec{u}_i$ de la base $\mathcal{B}_v$, al ser un elemento del espacio vectorial V, puede transformarse mediante la aplicación f obteniéndose $f(\vec{u}_i)$, que es un vector de W y por tanto puede escribirse como una combinación lineal de elementos de la base $\mathcal{B}_w$:

$$f(\vec{u}_i) = a_{1i}\vec{w}_1 + a_{2i}\vec{w}_2 + \ldots + a_{mi}\vec{w}_m = \begin{pmatrix} \vec{w}_1 & \vec{w}_2 & \ldots & \vec{w}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = M_w \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

con $i = 1, 2, \ldots, n$, y donde $M_w = \begin{pmatrix} \vec{w}_1 & \vec{w}_2 & \ldots & \vec{w}_m \end{pmatrix}$ es una matriz de m columnas, donde cada columna es un elemento de $\mathcal{B}_w$.

Transformación de los elementos de una base (continuación)

Si escribimos todos los elementos de la base $\mathcal{B}_v$ en una matriz de n columnas, donde cada columna es un elemento de la base $\mathcal{B}_v$ de V, esto es $M_v = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n \end{pmatrix}$, la imagen mediante la aplicación f de dichos elementos la podemos escribir como:

$$f(M_v) = \begin{pmatrix} f(\vec{u}_1) & f(\vec{u}_2) & \dots & f(\vec{u}_n) \end{pmatrix} = M_w \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = M_w A_{\mathcal{B}_w}^{\mathcal{B}_v}$$

donde

$$A_{\mathcal{B}_w}^{\mathcal{B}_v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

es una matriz que tiene por columnas las coordenadas de las imágenes de los vectores de $\mathcal{B}_v$ expresadas en la base $\mathcal{B}_w$.

Imagen de un vector de V en una base de W

Si tenemos un vector $\vec{x} \in V$, tal que $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_n\vec{u}_n = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \ldots & \vec{u}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M_v C_{\mathcal{B}_v}[\vec{x}]$

siendo $C_{\mathcal{B}_v}[\vec{x}] = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ las coordenadas de $\vec{x}$ en la base $\mathcal{B}_v$.

A través de la aplicación lineal f se tiene que $f(\vec{x}) = \vec{y}$, donde $\vec{y} \in W$ es

$\vec{y} = y_1\vec{w}_1 + y_2\vec{w}_2 + \ldots + y_m\vec{w}_m = \begin{pmatrix} \vec{w}_1 & \vec{w}_2 & \ldots & \vec{w}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = M_w C_{\mathcal{B}_w}[\vec{y}]$ siendo $C_{\mathcal{B}_w}[\vec{y}] = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ las coordenadas de $\vec{y}$ en $\mathcal{B}_w$.

Imagen de un vector de V en una base de W (continuación)

Aplicando las propiedades de las aplicaciones lineales tenemos que:

$$\vec{y}=f(\vec{x})\Rightarrow y_1\vec{w}_1+y_2\vec{w}_2+\ldots+y_m\vec{w}_m = x_1 f(\vec{u}_1)+x_2 f(\vec{u}_2)+\ldots+x_n f(\vec{u}_n)\Rightarrow$$

$$\left(\,\vec{w}_1\ \vec{w}_2\ \ldots\ \vec{w}_m\,\right)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = f(\,\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \ldots\ \vec{u}_n\,)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$M_w C_{\mathcal{B}_w}[\vec{y}] = f(M_v) C_{\mathcal{B}_v}[\vec{x}] \Rightarrow M_w C_{\mathcal{B}_w}[\vec{y}] = M_w A_{\mathcal{B}_w}^{\mathcal{B}_v} C_{\mathcal{B}_v}[\vec{x}]$$

donde hemos usado que $f(M_v) = M_w A_{\mathcal{B}_w}^{\mathcal{B}_v}$, según vimos anteriormente.
Por lo tanto

$$C_{\mathcal{B}_w}[\vec{y}] = A_{\mathcal{B}_w}^{\mathcal{B}_v} C_{\mathcal{B}_v}[\vec{x}]$$

donde

$$A_{\mathcal{B}_w}^{\mathcal{B}_v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

es la matriz de la transformación de los elementos de la base $\mathcal{B}_v$ definida anteriormente.

Matriz asociada a una aplicación lineal

Importante

La matriz $A^{\mathcal{B}_v}_{\mathcal{B}_w}$ es la matriz de la aplicación f con respecto a las bases $\mathcal{B}_v$ y $\mathcal{B}_w$ se escribe como

$$A^{\mathcal{B}_v}_{\mathcal{B}_w} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde cada columna i de la matriz son las coordenadas de la imagen según f del elemento $\vec{u}_i$ de la base $\mathcal{B}_v$ del espacio vectorial inicial V expresadas en la base $\mathcal{B}_w$ del espacio vectorial final W,

$$C_{\mathcal{B}_w}[f(\vec{u}_i)] = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

Matriz asociada a una aplicación lineal (continuación)

Ejemplo

Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & y-z \\ z & x \end{pmatrix}$, obtener la matriz de dicha aplicación lineal en las bases canónicas de ambos espacios vectoriales.

Como las bases canónicas son $\mathcal{B}_R = \{\vec{u}_1 = (1, 0, 0), \vec{u}_2 = (0, 1, 0), \vec{u}_3 = (0, 0, 1)\}$ y $\mathcal{B}_M = \left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ tenemos que:

$$f(\vec{u}_1) = f(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_4 \Rightarrow C_{\mathcal{B}_M}[f(\vec{u}_1)] = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{u}_2) = f(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \vec{v}_2 \Rightarrow C_{\mathcal{B}_M}[f(\vec{u}_2)] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{u}_3) = f(0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\vec{v}_2 + \vec{v}_3 \Rightarrow C_{\mathcal{B}_M}[f(\vec{u}_3)] = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz de la aplicación en las bases canónicas será:

$$A_{\mathcal{B}_M}^{\mathcal{B}_R} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz asociada a una aplicación lineal (continuación)

Ejemplo

Repetir el ejemplo anterior pero utilizando las bases $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{\vec{u}_1 = (1, 1, 0), \vec{u}_2 = (1, 0, 1), \vec{u}_3 = (-1, 0, 0)\}$ y $\mathcal{B}_{\mathcal{M}} = \left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ de los espacios vectoriales inicial y final, respectivamente.

Calculamos las imágenes de los elementos de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ y sus correspondientes coordenadas en el base $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$:

$$f(\vec{u}_1) = f(1, 1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_2 + \vec{v}_4 \Rightarrow C_{\mathcal{B}_{\mathcal{M}}}[f(\vec{u}_1)] = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{u}_2) = f(1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{v}_1 + \frac{3}{2}\vec{v}_2 + \vec{v}_3 + 2\vec{v}_4 \Rightarrow C_{\mathcal{B}_{\mathcal{M}}}[f(\vec{u}_2)] = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{u}_3) = f(-1, 0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_4 \Rightarrow C_{\mathcal{B}_{\mathcal{M}}}[f(\vec{u}_3)] = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz de la aplicación en las bases canónicas será:

$$A_{\mathcal{B}_{\mathcal{M}}}^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS

1. Hallar las matrices de las siguientes aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ respecto de la base canónica:
   - Giro de α grados con respecto al eje z.
   - Simetría con respecto a la recta $x = 0$, $y = 0$.
   - Simetría con respecto a la recta $x = y$, $z = 0$.
   - Proyección sobre el plano $x - y + z = 0$.
   - Proyección respecto a la recta $(x, y, z) = t(1, 1, 1)$.

2. Calcular la matriz de la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (2x - y, z)$ con respecto a las bases $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \{(1, -1, 0), (0, 2, 0), (1, 0, 1)\}$ y $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \{(2, -1), (1, 1)\}$

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = (x + y, z, x + z)$. Encontrar la matriz de f con respecto a la base canónica. Hallar la imagen mediante f de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.
   - $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $x + y + z = 0\}\}$
   - $V_2 = \{(x, y, 0)$ tal que $x, y \in \mathbb{R}\}$
   - $V_3 = \{(x, y, z) = t(1, -1, 1)$ tal que $t \in \mathbb{R}\}$

   En cada caso indicar la dimensión del subespacio y la dimensión de su imagen mediante f.

3.3 Cambio de base para aplicaciones lineales

Cambio de base en una aplicación lineal

Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal de V en W.

Si $\mathcal{B}_{v_1}$ es una base de V y $\mathcal{B}_{w_1}$ una base de W habrá una matriz $A_{\mathcal{B}_{w_1}}^{\mathcal{B}_{v_1}}$ asociada f con respecto de las bases $\mathcal{B}_{v_1}$ y $\mathcal{B}_{w_1}$.

Si la imagen de un vector $\vec{v} \in V$ mediante la aplicación es $\vec{w} = f(\vec{v})$, escribiendo la tranformación según las coordenadas de ambos vectores en las bases $\mathcal{B}_{v_1}$ y $\mathcal{B}_{w_1}$, respectivamente, tendremos que

$$C_{\mathcal{B}_{w_1}}[\vec{w}] = A_{\mathcal{B}_{w_1}}^{\mathcal{B}_{v_1}} C_{\mathcal{B}_{v_1}}[\vec{v}]$$

Consideremos a continuación otras dos bases de ambos espacios vectoriales, $\mathcal{B}_{v_2}$ base de V y $\mathcal{B}_{w_2}$ base de W. Ahora la matriz asociada a f es $A_{\mathcal{B}_{w_2}}^{\mathcal{B}_{v_2}}$.

La transformación de $\vec{v}$ en $\vec{w}$ en las nuevas bases $\mathcal{B}_{v_2}$ y $\mathcal{B}_{w_2}$ es

$$C_{\mathcal{B}_{w_2}}[\vec{w}] = A_{\mathcal{B}_{w_2}}^{\mathcal{B}_{v_2}} C_{\mathcal{B}_{v_2}}[\vec{v}]$$

Cambio de base en una aplicación lineal (continuación)

Para ver la relación entre las matrices de la aplicación en las diferentes bases, $A_{\mathcal{B}_{w_1}}^{\mathcal{B}_{v_1}}$ y $A_{\mathcal{B}_{w_2}}^{\mathcal{B}_{v2}}$, usaremos las matrices de cambio de base en V, $M_{\mathcal{B}_{v_1}}^{\mathcal{B}_{v_2}}$, y en W, $M_{\mathcal{B}_{w_1}}^{\mathcal{B}_{w_2}}$, que nos permiten escribir

$$C_{\mathcal{B}_{v_2}}[\vec{v}] = M_{\mathcal{B}_{v_2}}^{\mathcal{B}_{v_1}} C_{\mathcal{B}_{v_1}}[\vec{v}] \qquad \text{y} \qquad C_{\mathcal{B}_{w_2}}[\vec{w}] = M_{\mathcal{B}_{w_2}}^{\mathcal{B}_{w_1}} C_{\mathcal{B}_{w_1}}[\vec{w}]$$

Como $C_{\mathcal{B}_{w_2}}[\vec{w}] = A_{\mathcal{B}_{w_2}}^{\mathcal{B}_{v_2}} C_{\mathcal{B}_{v_2}}[\vec{v}]$, sustituyendo las expresiones anteriores tenemos que

$$M_{\mathcal{B}_{w_2}}^{\mathcal{B}_{w_1}} C_{\mathcal{B}_{w_1}}[\vec{w}] = A_{\mathcal{B}_{w_2}}^{\mathcal{B}_{v_2}} M_{\mathcal{B}_{v_2}}^{\mathcal{B}_{v_1}} C_{\mathcal{B}_{v_1}}[\vec{v}]$$

Y multiplicando por $\left(M_{\mathcal{B}_{w_2}}^{\mathcal{B}_{w_1}}\right)^{-1}$ a ambos ladostenemos $C_{\mathcal{B}_{w_1}}[\vec{w}] = \left(M_{\mathcal{B}_{w_2}}^{\mathcal{B}_{w_1}}\right)^{-1} A_{\mathcal{B}_{w_2}}^{\mathcal{B}_{v_2}} M_{\mathcal{B}_{v_2}}^{\mathcal{B}_{v_1}} C_{\mathcal{B}_{v_1}}[\vec{v}]$
Como además $C_{\mathcal{B}_{w_1}}[\vec{w}] = A_{\mathcal{B}_{w_1}}^{\mathcal{B}_{v_1}} C_{\mathcal{B}_{v_1}}[\vec{v}]$ tenemos que $A_{\mathcal{B}_{w_1}}^{\mathcal{B}_{v_1}} = \left(M_{\mathcal{B}_{w_2}}^{\mathcal{B}_{w_1}}\right)^{-1} A_{\mathcal{B}_{w_2}}^{\mathcal{B}_{v_2}} M_{\mathcal{B}_{v_2}}^{\mathcal{B}_{v_1}}$
Por lo tanto:

$$A_{\mathcal{B}_{w_1}}^{\mathcal{B}_{v_1}} = M_{\mathcal{B}_{w_1}}^{\mathcal{B}_{w_2}} A_{\mathcal{B}_{w_2}}^{\mathcal{B}_{v_2}} M_{\mathcal{B}_{v_2}}^{\mathcal{B}_{v_1}}$$

De igual forma podemos escribir:

$$A_{\mathcal{B}_{w_2}}^{\mathcal{B}_{v_2}} = M_{\mathcal{B}_{w_2}}^{\mathcal{B}_{w_1}} A_{\mathcal{B}_{w_1}}^{\mathcal{B}_{v_1}} M_{\mathcal{B}_{v_1}}^{\mathcal{B}_{v_2}}$$

Cambio de base en una aplicación lineal (continuación)

Resumen

$$f\colon V \longrightarrow W$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
\mathcal{B}_{V_1} \arrow[r, "A^{\mathcal{B}_{V_1}}_{\mathcal{B}_{W_1}}"] \arrow[d, shift right=1ex, "M^{\mathcal{B}_{V_1}}_{\mathcal{B}_{V_2}}"'] & \mathcal{B}_{W_1} \arrow[d, shift right=1ex, "M^{\mathcal{B}_{W_1}}_{\mathcal{B}_{W_2}}"'] \\
\mathcal{B}_{V_2} \arrow[r, "A^{\mathcal{B}_{V_2}}_{\mathcal{B}_{W_2}}"] \arrow[u, shift right=1ex, "M^{\mathcal{B}_{V_2}}_{\mathcal{B}_{V_1}}"'] & \mathcal{B}_{W_2} \arrow[u, shift right=1ex, "M^{\mathcal{B}_{W_2}}_{\mathcal{B}_{W_1}}"']
\end{tikzcd}$$

Cambio de base en una aplicación lineal (continuación)

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $f(x,y,z) = (x - y + 2z, x + 3y)$ y las bases $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,-1),(2,1,0),(0,1,1)\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(-2,1),(1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Calcular:

- Matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.
- Matriz asociada a f respecto de la base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ y la canónica de $\mathbb{R}^2$.
- Matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y la base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^2$.
- Matriz asociada a f respecto de la base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ y la base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^2$.

La matriz de la aplicación en las bases canónicas es $A_{C_2}^{C_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

La matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a la canónica C_1 es $M_{C_1}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la de cambio de $\mathcal{B}_2$ a la canónica C_2 es $M_{C_2}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Por lo tanto escribiremos $A_{C_2}^{\mathcal{B}_1} = A_{C_2}^{C_1} M_{C_1}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{C_2}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Para $A_{\mathcal{B}_2}^{C_1} = M_{\mathcal{B}_2}^{C_2} A_{C_2}^{C_1} = \left(M_{C_2}^{\mathcal{B}_2}\right)^{-1} A_{C_2}^{C_1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{\mathcal{B}_2}^{C_1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

Por último

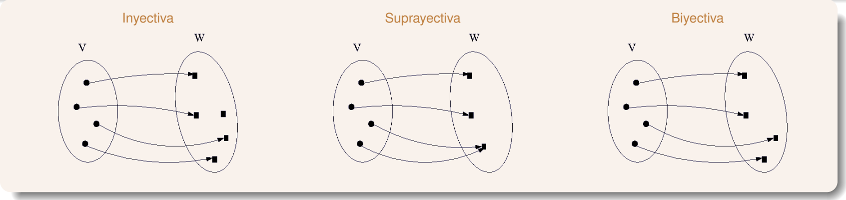
$A_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} = M_{\mathcal{B}_2}^{C_2} A_{C_2}^{C_1} M_{C_2}^{\mathcal{B}_1} = \left(M_{C_2}^{\mathcal{B}_2}\right)^{-1} A_{C_2}^{C_1} M_{C_1}^{\mathcal{B}_1} = \left(M_{C_2}^{\mathcal{B}_2}\right)^{-1} A_{C_2}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -4 \\ -1 & -11 & -7 \end{pmatrix}$

EJERCICIOS

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por $f(x, y, z) = (x - y + z, 4y - z, x + y + 5z)$, con $\mathcal{B} = \{(1, 2, 1), (3, 1, 0), (-1, 3, 1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y el vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ de coordenadas $(-1, 1, 1)$ en la base $\mathcal{B}$. Calcular:
   - Las coordenadas del vector $f(\vec{v})$ en la base canónica.
   - Las coordenadas de $f(\vec{v})$ respecto de la base $\mathcal{B}$.
2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal tal que $f(3, -5) = (1, 1, 1, 1)$, $f(-1, 2) = (2, 1, 0, -2)$. Calcular:
   - Hallar la expresión de la aplicación f, es decir, dado un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ determinar $f(\vec{v})$.
   - Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$.
   - Determinar el subespacio imagen de la aplicación lineal f y su dimensión.
3. Sea la aplicación f definida por:
   $f(\vec{u}_1) = f(1, 0, 0) = (1, 2)$
   $f(\vec{u}_2) = f(1, 1, 0) = (1, 1)$
   $f(\vec{u}_3) = f(1, 1, 1) = (0, 2)$
   donde se considera la siguiente base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$. Halla:
   - Matriz asociada a f respecto de las bases $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ y la canónica de $\mathbb{R}^2$.
   - Matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.
4. Se define una aplicación f por:
   $f(\vec{e}_1) = f(1, 0) = (1, 2, 0, -1)$
   $f(\vec{e}_2) = f(0, 1) = (0, 1, -1, 0)$
   Sabiendo que las coordenadas de $f(\vec{e}_1)$ y $f(\vec{e}_2)$ están referidas a la base $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4} = \{\vec{v}_1 = (1, 0, 0, 0), \vec{v}_2 = (1, 1, 0, 0), \vec{v}_3 = (1, 1, 1, 0), \vec{v}_4 = (1, 1, 1, 1)\}$. Calcula:
   - Matriz asociada a f referida a la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}$.
   - Matriz asociada a f referida a las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$.
   - $f(1, -2)$ en las canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$.

3.4 Núcleo e imagen de una aplicación lineal

Tipos de aplicaciones lineales



Monomorfirsmo Diremos que una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ es **inyectiva** si $\forall x, y \in V$ con $x \neq y$ se tiene que $f(x) \neq f(y)$. Cuando f es inyectiva la aplicación lineal también se denomina **monomorfismo**.

Epimorfismo Diremos que una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ es **sobreyectiva o suprayectiva** si $\forall w \in W, \exists v \in V$ con $f(v) = w$. Cuando f es sobreyectiva la aplicación lineal también se denomina **epimorfismo**.

Isomorfismo Diremos que una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez. Cuando f es biyectiva la aplicación lineal también se denomina **isomorfismo**.

Automorfismo En el caso particular de que los espacios vectoriales de origen y llegada sean iguales, $V = W$ la aplicación lineal también se denomina **endomorfismo**, y si además el endomorfismo es biyectivo entonces se denomina **automorfismo**.

Forma lineal Cuando el espacio vectorial final de una aplicación lineal es $W = \mathbb{R}$, el cuerpo de los números reales, la aplicación lineal se denomina **forma lineal**.

Núcleo de una aplicación lineal

Núcleo de una aplicación

Dada una aplicación lineal f entre los espacios vectoriales V y W, $f : V \rightarrow W$, definimos el **núcleo o kernel** de la aplicación lineal como el conjunto de todos aquellos $\vec{v} \in V$ tales que $f(\vec{v}) = \vec{0}$. Es decir:

$$\mathcal{N}(f) = \ker(f) = \{\vec{v} \in V | f(\vec{v}) = \vec{0}\}$$

Observación

El núcleo de una aplicación f, $\ker(f)$, nunca es vacío ya que $f(\vec{0}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{0} \in \ker(f)$

Importante

Si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación lineal entre los espacios vectoriales V y W, entonces $\ker(f)$ **es un subespacio vectorial de** V

Demostración Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \ker(f) \Rightarrow f(\vec{v}_1) = f(\vec{v}_2) = \vec{0}$ y además para cualquier combinación lineal de la forma $\vec{w} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$ se cumple que $f(\vec{w}) = f(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) = \alpha f(\vec{v}_1) + \beta f(\vec{v}_2) = \alpha\vec{0} + \beta\vec{0} = \vec{0}$ por lo que $\vec{w} \in \ker(f)$

Imagen de una aplicación lineal

Imagen de una aplicación

Dada una aplicación lineal f entre los espacios vectoriales V y W, $f : V \to W$, definimos la **imagen** de la aplicación lineal como el conjunto de todos aquellos $\vec{w} \in w$ tales que existe al menos un $\vec{v} \in V$ tal que $f(\vec{v}) = \vec{w}$. Es decir:

$$\mathrm{img}(f) = \{\vec{w} = f(\vec{v}) \in W | \vec{v} \in V\}$$

Importante

Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal entre los espacios vectoriales V y W, entonces $\mathrm{img}(f)$ **es un subespacio vectorial de** W

Demostración Si $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \mathrm{img}(f) \Rightarrow \exists \vec{v}_1, \vec{v}_1 | \vec{w}_1 = f(\vec{v}_1), \vec{w}_2 = f(\vec{v}_2)$ y además para cualquier combinación lineal de la forma $\vec{w} = \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2$ se cumple que $\vec{w} = \alpha f(\vec{v}_1) + \beta f(\vec{v}_2) = f(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) = f(\vec{v})$ donde $\vec{v} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \in V$ ya que V es un espacio vectorial y, por lo tanto, cualquier combinación lineal de elementos de V pertenece a V. Como $\vec{w} = f(\vec{v})$, esto es, es la imagen de un elemento de V, entonces cualquier combinación lineal de elementos de $\mathrm{img}(f)$ también pertenece a $\mathrm{img}(f)$,$\vec{w} = \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2 \in \mathrm{img}(f)\ \forall \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \mathrm{img}(f)$, por lo que $\mathrm{img}(f)$ es un subespacio vectorial de W

Caracterización de una aplicación lineal

Importante

- Una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ es inyectiva si y sólo si $\ker(f) = \{\vec{0}\}$
- Una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ es sobreyectiva si y sólo si $\mathrm{img}(f) = W$

Definición

Definimos el **rango**, $rg(f)$, de una aplicación lineal f como el rango de la matriz asociada la aplicación lineal.

Teorema Núcleo-Imagen

Dada una aplicación lineal f entre los espacios vectoriales V y W, $f : V \to W$, si V es de dimensión finita entonces: $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{img}(f)) = \dim(V)$

Nota

Del teorema Núcleo-Imagen obtenemos que:

1. f es inyectiva si y sólo si $rg(f) = \dim(V)$
2. f es sobreyectiva si y sólo si $rg(f) = \dim(W)$

Caracterización de una aplicación lineal (continuación)

Ejemplo

Sea la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida como $f(x,y,z)=(x-y,x+z)$. Vamos a determinar una base y las ecuaciones paramétricas y cartesianas del núcleo y de la imagen, comprobar que se verifica el teorema núcleo-imagen y clasificar f.

Calculamos el *núcleo de la aplicación* $f(x,y,z)=(0,0)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x-y=0\\ x+z=0\end{array}\right.\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\1&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{F_2-F_1}$

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\0&1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{F_1+F_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&0\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-\alpha\\ y=-\alpha\\ z=\alpha\end{array}\right.\Rightarrow\ker(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x+z=0,\,y+z=0\right\}=$

$\left\{(-\alpha,-\alpha,\alpha)\in\mathbb{R}^3|\alpha\in\mathbb{R}\right\}\Rightarrow\dim(\ker(f))=1\Rightarrow\mathcal{B}_{\ker(f)}=\{(-1,-1,1)\}$

Calculamos la *imagen de la aplicación* mediante la imagen de los elementos de la base del espacio vectorial inicial: $f(1,0,0)=(1,1)$, $f(0,1,0)=(-1,0)$, $f(0,0,1)=(0,1)$. Podemos ver que sólo hay dos vectores linealmente independientes, por lo que $\dim(\mathrm{img}(f))=2\Rightarrow\mathrm{img}(f)=\mathbb{R}^2\Rightarrow\mathcal{B}_{\mathrm{img}(f)}=\{(1,0),(0,1)\}$

Se puede comprobar el *teorema núcleo-imagen*: $\dim(\mathbb{R}^3)=\dim(\ker(f))+\dim(\mathrm{img}(f))\Rightarrow 3=1+2$

Como $\ker(f)\neq\left\{\vec{0}\right\}$ la aplicación f *no es inyectiva*. Como $\mathrm{img}(f)=\mathbb{R}^2$ la aplicación *es sobreyectiva*.

Se podía haber comprobado también mirando la matriz de la aplicación que es: $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, como

$rg(A)=2=\dim(\mathbb{R}^2)\neq\dim(\mathbb{R}^3)$ la aplicación es sobreyectiva, pero no inyectiva.

Isomorfismos

Definición

Diremos que dos espacios vectoriales cualesquiera son **isomorfos** si podemos encontrar un isomorfismo entre ellos. Para que esto ocurra entre espacios vectoriales de dimensión finita la dimensión de ambos debe ser la misma.

Teorema

Dado un número natural cualquiera n todos los espacios vectoriales de dimensión n sobre un mismo cuerpo son isomorfos.

Ejemplos

El espacio vectorial de las matrices $\mathcal{M}_{3\times 2}$ es isomorfo de $\mathbb{R}^6$
El espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3, $P_3[x]$, es isomorfo de $\mathbb{R}^4$

EJERCICIOS

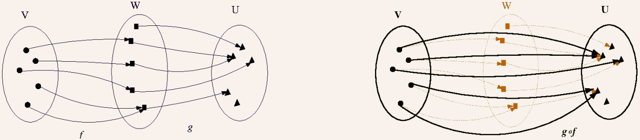
1. Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida en la base canónica por:
   $f(\vec{e}_1)=3\vec{e}_1-2\vec{e}_2+\vec{e}_3,\quad f(\vec{e}_2)=\vec{e}_1+\vec{e}_2,\quad f(\vec{e}_3)=2\vec{e}_1-3\vec{e}_2+\vec{e}_3$. Calcular:
   - Matriz de la aplicación lineal.
   - Ecuaciones de f.
   - Ecuaciones paramétricas y cartesianas del núcleo y de la imagen.
2. Dadas las aplicaciones $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ y $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, definidas por $f(x,y)=(x+y,x)$ y $g(x,y)=(2x,3x-y)$, calcular las expresiones algebráicas y matriciales de $g\circ f$, $f\circ g$ y $f+g$.
3. Sea $\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-3&-1\end{pmatrix}$ la matriz de una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ en las bases canónicas. Calcular:
   - Expresión algebráica de f
   - $f(-1,2,3)$
   - Estudiar si existe algún vector (x,y,z) cuya imagen sea el vector $(1,-1)$
   - Ecuaciones paramétricas y cartesianas del núcleo y de la imagen
   - Comprobar que se verifica el teorema núcleo-imagen.
   - Clasificar f
   - Calcular la matriz de f respecto de las bases: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}=\{(1,0,1),(0,0,-1),(2,1,1)\}$ y $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}=\{(1,0),(1,1)\}$
4. Dada la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de la base canónica es $\begin{pmatrix}2&1&1\\\alpha&2&2\\6&3&\beta\end{pmatrix}$. Calsificar f según los distintos valores de α y β.
5. Describir el núcleo y la imagen de las siguientes aplicaciones lineales, indicando si son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas:
   - $M_B:\mathcal{M}_{2\times 2}\to\mathcal{M}_{2\times 1}$ donde $M_B(A)=AB$ con $B=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
   - La aplicación derivación de $P_n[x]$ en $P_{n-1}[x]$

3.5 Operaciones con aplicaciones lineales

Composición de dos aplicaciones lineales

Definición

Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal de V en W y $g : W \longrightarrow U$ una aplicación lineal de W en U, podemos definir una *aplicación compuesta* $g \circ f : V \longrightarrow U$ del espacio vectorial V en U, donde dado un vector $\vec{v} \in V$ tenemos que $g \circ f(\vec{v}) = g(f(\vec{v}))$, donde $\vec{w} = f(\vec{v}) \in W$ es la imagen de $\vec{v}$ mediante la aplicación f y $\vec{u} = g(\vec{w}) \in U$ es la imagen de $\vec{w} = f(\vec{v})$ mediante la aplicación g



Dadas las bases $\mathcal{B}_v$, $\mathcal{B}_w$ y $\mathcal{B}_u$ de los espacios vectoriales V, W y U, y dadas las aplicaciones lineales $f : V \to W$ y $g : W \to U$, si $A_{\mathcal{B}_w}^{\mathcal{B}_v}$ es la matriz de la aplicación f y $B_{\mathcal{B}_u}^{\mathcal{B}_w}$ la de la aplicación g en las bases anteriores, tendremos que $\forall \vec{v} \in V,\ C_{\mathcal{B}_w}[f(\vec{v})] = A_{\mathcal{B}_w}^{\mathcal{B}_v} C_{\mathcal{B}_v}[\vec{v}]$ y $\forall \vec{w} \in W,\ C_{\mathcal{B}_u}[g(\vec{w})] = B_{\mathcal{B}_u}^{\mathcal{B}_w} C_{\mathcal{B}_w}[\vec{w}]$, por lo tanto, para la aplicación compuesta $\forall \vec{v} \in V,\ C_{\mathcal{B}_u}[g(f(\vec{v}))] = B_{\mathcal{B}_u}^{\mathcal{B}_w} C_{\mathcal{B}_w}[f(\vec{v})] = B_{\mathcal{B}_u}^{\mathcal{B}_w} \left(A_{\mathcal{B}_w}^{\mathcal{B}_v} C_{\mathcal{B}_v}[\vec{v}] \right)$. Así pues, tendremos que la matriz de la aplicación compuesta $g \circ f : V \to W$ en las bases $\mathcal{B}_v$ y $\mathcal{B}_u$ es

$$C_{\mathcal{B}_u}^{\mathcal{B}_v} = B_{\mathcal{B}_u}^{\mathcal{B}_w} A_{\mathcal{B}_w}^{\mathcal{B}_v}$$

Composición de dos aplicaciones lineales (continuación)

Ejemplo

Dadas las aplicaciones $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 3x_2, x_1 + x_2)$ y $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $g(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + 2x_3, x_1 - x_3)$, obtener las matrices de las aplicaciones $f \circ g$ y $g \circ f$ en las bases canónicas.

Como la matriz de la aplicación f en la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la de la aplicación g en la base canónica es

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, tendremos que:

- La matriz de $f \circ g$ es $C = AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$
  $(f \circ g)(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2 + 3x_3, 3x_1 - 3x_3, x_1 + x_2 + x_3)$
- La matriz de $g \circ f$ es
  $D = BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (g \circ f)(x_1, x_2) = (2x_1 + 5x_2, -2x_2)$

Inversa de un endomorfismo

Definición

Dada un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ podemos definir el endomorfismo inverso $f^{-1} : V \longrightarrow V$ si y sólo si la aplicación f es biyectiva, de modo que $\forall \vec{v} \in V, \exists \vec{w} = f^{-1}(\vec{v}) \in V | f(\vec{w}) = \vec{v}$
Si A es la matriz de la aplicación f, entonces A^{-1} es la matriz de la aplicación f^{-1}

Ejemplo

Dada la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1 + x_2)$ obtener f^{-1} en caso de que sea posible.

La matriz de la aplicación f es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, como se cumple que $rg(A) = 2$, ya que $|A| \neq 0$, tendremos que la aplicación en sobreyectiva (el rango es igual a la dimensión de espacio final) y además es inyectiva (el rango es igual a la dimensión del espacio inicial), por lo que es biyectiva y, por tanto, tendrá inversa.

La matriz de la aplicación inversa f^{-1} será $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, así que la aplicación inversa es

$f^{-1}(x_1, x_2) = (-x_1 + 2x_2, x_1 - x_2)$

Potencia de un endomorfismo

Definición

Dada un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ podemos definir la potencia *n-ésima* $f^n : V \longrightarrow V$ como la aplicación que se obtiene al componer n veces consecutivas la aplicación f, por lo tanto

$f^n = \overbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}^{n)}$

Si A es la matriz de la aplicación f, entonces la matriz de la aplicación f^n será A^n

Ejemplo

Dada la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1 + x_2)$ obtener f^3

La matriz de la aplicación f es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, por lo tanto la matriz de la aplicación f^3 será

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, así que la aplicación f^3 es

$f^3(x_1, x_2) = (7x_1 + 10x_2, 5x_1 + 7x_2)$

EJERCICIOS

1. Dadas las aplicaciones $f(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$ y $g(x, y, z) = (x + 2y, x - y + z)$ obtener la aplicación $g \circ f$ y su correspondiente matriz en la base canónica.
2. Clasifica el endomorfismo $f(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$. Encuentra las ecuaciones algebráicas de f^{-1}, f^2 en los casos en que sea posible.

4.1 Introducción a la diagonalización de endomorfismos

Matrices diagonales: repaso

Matriz diagonal Llamamos **matriz diagonal** a una matriz de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Propiedades

Si A es una matriz diagonal, como la expresada anteriormente:

- Su determinante es el producto de los elementos de la diagonal: $|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$
- Su inversa, si existe, es diagonal y sus elementos son los elementos inversos de A: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$
- Su potencia es diagonal y sus elementos son la potencia de los elementos de A: $A^m = \begin{pmatrix} a_{11}^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^m & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^m \end{pmatrix}$
- Coincide con su traspuesta: $A = A^t$

Introducción

Toda aplicación lineal entre espacios vectoriales tenía asociada una matriz respecto de unas determinadas bases y esa matriz define la aplicación.

En este tema solo vamos a considerar aplicaciones lineales, $f : V \longrightarrow V$, sobre un mismo espacio vectorial (endomorfismos).

Si en una base $\mathcal{B}_1$ la matriz de la aplicación es $A = A_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}$ y en otra base $\mathcal{B}_2$ es $A' = A_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2}$, la relación entre estas matrices se calcula usando la matriz de cambio de base $P = M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$

$$A' = P^{-1}AP$$

Introducción (continuación)

A la vista de lo anterior, podemos preguntarnos si dado un endomorfismo podemos encontrar una base $\mathcal{B}_2$ de manera que la matriz A' respecto de esta nueva base sea más sencilla que respecto de la base antigua $\mathcal{B}_1$.

De hecho, lo mejor sería encontrar una base en la que la matriz del endomorfismo sea *diagonal*.

No todas las aplicaciones son diagonalizables, nuestro objetivo será encontrar la base en la cual la matriz de la aplicación tenga la forma *más sencilla* posible.

Ejemplo

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ consideremos el subespacio $V_1 = \{(x_1, x_2, 0) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Si consideramos la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y S es la simetría con respecto al subespacio vectorial V_1, se tiene que:

$$S(\vec{e}_1) = \vec{e}_1, \quad S(\vec{e}_2) = \vec{e}_2, \quad S(\vec{e}_3) = -\vec{e}_3$$

Por lo tanto la matriz de la aplicación respecto de la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Introducción (continuación)

Ejemplo (Simetría)

Podemos definir la simetría respecto de cualquier subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.
Consideremos ahora el subespacio $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y + 2z = 0\}$. Queremos encontrar las ecuaciones de la aplicación SIMETRÍA respecto de la base canónica.

La idea es buscar una base (de $\mathbb{R}^3$) en la que la matriz de la aplicación sea lo más sencilla posible. Esta base la componen dos vectores del subespacio V_2 y otro perpendicular a ambos. Por ejemplo $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1 = (1, 1, 0), \vec{u}_2 = (-2, 0, 1), \vec{u}_3 = (1, -1, 2)\}$.

La simetría cumplirá

$$S(\vec{u}_1) = \vec{u}_1, \quad S(\vec{u}_2) = \vec{u}_2, \quad S(\vec{u}_3) = -\vec{u}_3$$

de manera que la matriz buscada es

$$S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Utilizando la matriz de cambio de base (de $\mathcal{B}$ a la base canónica)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz S respecto de la base canónica sabiendo que $S = PS'P^{-1}$

La expresión algebráica de la aplicación queda

$$S(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z, \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z, -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z\right)$$

Motivación para la diagonalización de endomorfismos

Dos razones por las que puede ser *necesario* simplificar la matriz asociada a una aplicación:

1. *Una razón computacional*: para resolver algunos problemas necesitamos realizar varias operaciones con las matrices asociadas a las aplicaciones (exponenciar una matriz, ...), estas operaciones se complican si la matriz tiene muchas entradas (es decir, pocos ceros).

Ejemplo (Rotación)

Sea R_α la rotación en el plano de un ángulo α. Supongamos que queremos rotar un punto 9 veces. Esto supone componer la rotación tantas veces como queremos rotar el punto. Como la matriz de rotación de un ángulo α es $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

La aplicación que buscamos tendrá como matriz asociada la matriz $A^9 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}^9$

Estos cálculos son terriblemente tediosos. Nuestro objetivo será encontrar una manera más sencilla para realizar estas operaciones.

2. *Otra razón geométrica*: En algunas aplicaciones lineales hay subespacios vectoriales cuyos vectores, al transformarlos mediante una aplicación, siguen perteneciendo al mismo subespacio. Por ejemplo, en la simetría de los ejemplos anteriores, los vectores del plano siguen estando en dicho plano; o en una rotación en el espacio respecto al eje Z, los puntos de dicho eje siguen perteneciendo al eje después de girarlos.

Subespacios invariantes

A este tipo de subespacios los llamamos **invariantes**.

Subespacios invariantes

Subespacio invariante Dado un espacio vectorial V y una aplicación lineal $f : V \longrightarrow V$ diremos que el subespacio W de V es *invariante* respecto a f si $f(W) \subset W$, es decir, la imagen $f(\vec{w})$ de todo vector $\vec{w} \in W$ es un elemento de W

Transformaciones en un subespacio invariante

Si $\mathcal{B}_W = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$ es una base del subespacio invariante W de V, de dimensión $\dim(W) = m$, cualquier vector $\vec{w} = \sum_{i=1}^{m} c_i \vec{u}_i \in W$ cumplirá que bajo la aplicación $f : V \longrightarrow V$ tiene como imagen $f(\vec{w}) = \sum_{i=1}^{m} c_i f(\vec{u}_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{u}_i \in W$, ya que cualquier vector de la base $\mathcal{B}_W$ tendrá como imagen una combinación de vectores de la base $\mathcal{B}_W$.
De este modo, si $\dim(W) = 1$ tendremos que $\mathcal{B}_W = \{\vec{u}\}$ y cualquier vector $\vec{w} \in W$ se escribirá como $\vec{w} = c\vec{u}$ y su imagen mediante la aplicación f será $f(\vec{w}) = cf(\vec{u}) = c\lambda\vec{u} \Rightarrow f(\vec{w}) = \lambda\vec{w}$

Vectores y Valores Propios Un vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ de un espacio vectorial V sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ se llama **vector propio** de la aplicación lineal $f : V \to V$ si existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que:

$$f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$$

El escalar λ se denomina **valor propio** de la aplicación f correspondiente al vector propio $\vec{v}$. Por lo tanto, un vector propio es un elemento de un subespacio invariante de dimensión 1.
Los vectores y valores propios son también denominados **autovectores** y **autovalores**, respectivamente.

Cálculo de vectores y valores propios de una aplicación lineal

Sea $f : V \longrightarrow V$ donde V es un espacio de dimensión n sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, sea A la matriz asociada a f en la base canónica $\mathcal{B}_C$ y consideremos la matriz identidad $\mathbb{I}_n$ de orden n. Para cualquier $\vec{v} \in V$ tenemos que $f(\vec{v}) = A\vec{v}$. Si además este vector es un vector propio de la aplicación lineal f tendremos entonces que $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, para cierto $\lambda \in \mathbb{K}$, por tanto:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Hay que tener en cuenta que $\vec{v} = \mathbb{I}_n\vec{v}$ luego podemos escribir la expresión anterior como:

$$A\vec{v} - \lambda\mathbb{I}_n\vec{v} = (A - \lambda\mathbb{I}_n)\vec{v} = \vec{0}$$

Esta es una ecuación matricial (sistema de ecuaciones lineales) homogéneo, que nos permitirá obtener los valores y vectores propios.

Cálculo de vectores y valores propios (continuación)

Procedimiento

1. Hay que obtener los valores de λ para los cuales la ecuación matricial $(A - \lambda\mathbb{I}_n)\vec{v} = \vec{0}$ tiene soluciones distintas a la trivial (buscamos $\vec{v} \neq \vec{0}$). Estos serán los autovalores.
2. Hay que determinar para cada solución λ_i, cuales son los vectores solución del sistema $(A - \lambda_i\mathbb{I}_n)\vec{v}_i = \vec{0}$, que serán los autovectores asociados al autovalor correspondiente.

Importante

Como queremos que las soluciones del sistema matricial sean distintas de la trivial, el sistema debe ser compatible indeterminado, lo cual implica:

$$|A - \lambda\mathbb{I}_n| = 0$$

Cálculo de vectores y valores propios (continuación)

Ecuación característica Al determinante $|A - \lambda \mathbb{I}_n|$ igualado a 0, esto es $|A - \lambda \mathbb{I}_n| = 0$, lo denominaremos **ecuación característica** de la aplicación f o, por extensión, ecuación característica de la matriz A.

Polinomio característico El desarrollo de $|A - \lambda \mathbb{I}_n|$ es un polinomio de grado n en λ que se denomina **polinomio característico**. Los valores propios de la matriz A son las raíces de dicho polinomio.

Teorema

La condición necesaria y suficiente para que λ sea un valor propio de la matriz cuadrada A es que

$$|A - \lambda \mathbb{I}_n| = 0$$

El número de valores propios, reales o complejos, de una matriz A de dimensión $n \times n$, teniendo en cuenta su multiplicidad es n.

Cálculo de vectores y valores propios (continuación)

Propiedades

Dada una matriz A de orden n. Entonces:

1. A y A^t tienen los mismo autovalores.
2. Si λ es un autovalor de A, entonces $k\lambda$ es un autovalor de kA.
3. Si λ es un autovalor de A y A es regular, entonces $\frac{1}{\lambda}$ es un autovalor de A^{-1}
4. Si λ es un autovalor de A, entonces λ^n es un autovalor de A^n.
5. Los autovalores de un endomorfismo idempontente (o sea, $f = f^2$, y por tanto su matriz asociada verifica que $A = A^2$) de un espacio vectorial son $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$.

Cálculo de vectores y valores propios (continuación)

El sistema de ecuaciones $(A - \lambda \mathbb{I}_n)\vec{v} = \vec{0}$ permite obtener los autovectores $\vec{v}$ de un autovalor dado λ de multiplicidad m
Este sistema es compatible indeterminado con un número de parámetros libre g, tal que $1 \leq g \leq m$, de modo que los autovectores $\vec{v}$ de λ dependerán de g parámetros libres.

Subespacio vectorial propio

Si λ es un autovalor, entonces $|A - \lambda \mathbb{I}_n| = 0$, y $(A - \lambda \mathbb{I}_n)\vec{v} = \vec{0}$ es un sistema compatible indeterminado. Por tanto, si $\vec{v}$ es una solución del sistema $(A - \lambda \mathbb{I}_n)\vec{v} = \vec{0}$, entonces $\alpha \vec{v}$ también lo es, donde $\alpha \in \mathbb{R}$.
Así, las soluciones de $(A - \lambda \mathbb{I}_n)\vec{v} = \vec{0}$ forman un subespacio vectorial que denominaremos *subespacio vectorial propio*, y su dimensión será g, el número de parámetros libres del sistema de ecuaciones.

Multiplicidades algebráicas y geométricas

Definiciones

Sea f un endomorfismo del espacio vectorial V de dimensión n. Sea A a matriz asociada a dicho endomorfismo y λ un autovalor de A.

1. Se llama **multiplicidad algebráica** de λ al orden de multiplicidad $\boldsymbol{m}$ de λ como raíz del polinomio característico.
2. Se llama **multiplicidad geométrica** de λ a la dimensión $\boldsymbol{g}$ del subespacio propio asociado a λ.

Propiedades de los autovalores y autovectores

1. A todo vector propio $\vec{v}$ le corresponde un único valor propio.
2. Sea $S(\lambda)$ el conjunto de vectores propios asociados a un mismo autovalor λ. El conjunto $S_1(\lambda) = S(\lambda) \cup \{\vec{0}\} = \ker(A - \lambda \mathbb{I}_n)$ es un subespacio vectorial de V.
3. El número de vectores propios que son linealmente independientes entre los correspondientes a un valor propio λ_i es igual a $\dim(V) - rg(A - \lambda_i \mathbb{I}_n)$.
4. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ son los r autovalores distintos del endomorfismo f, los autovectores asociados son linealmente independientes.

Diagonalización por semejanza

Definición

Dos matrices cuadradas del mismo tamaño, A y A', decimos que son **matrices semejantes** si están asociadas a un mismo endomorfismo, es decir, si son tales que existe una matriz P regular que cumple que

$$A' = P^{-1}AP$$

Propiedades

1. Si A y B son semejantes, entonces tienen el mismo determinante, $|A| = |B|$.
2. Si A y B son semejantes, entonces A^n y B^n son semejantes.
3. Si A y B son semejantes, entonces tiene la misma traza, $traza(A) = traza(B)$

Diagonalización por semejanza (continuación)

Definición

Sea A un matriz cuadrada. Se dice que una matriz es **diagonalizable por semejanza** si existe una matriz diagonal semejante a A, es decir, existe una matriz regular P y una matriz diagonal D tales que $D = P^{-1}AP$.
Ya sabemos que un endomorfismo es diagonalizable si y sólo si existe una base del espacio vectorial formada por autovalores. Existe otra forma de saber si la matriz es diagonalizable estudiando las multiplicidades de los autovalores.

Proposición

Si los distintos autovalores del endomorfismo f de V son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ con multiplicidades algebráicas $m_1, m_2, \ldots, m_k$ y multiplicidades geométricas $g_1, g_2, \ldots, g_k$, entonces f (o su matriz A) es **diagonalizable** si y sólo si se verifica:

1. $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = \dim(V)$
2. $g_i = m_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots k$

Diagonalización por semejanza (continuación)

Una vez que hemos comprobado que el endomorfismo f es diagonalizable, tenemos que:

- La matriz del endomorfismo es diagonal en una base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ de V formada por los vectores que forman las bases de los subespacios propios.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

  $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores de f cada uno de ellos repetido tantas veces como indique su multiplicidad algebráica. λ_i es el autovalor asociado a $\vec{u}_i$

- La matriz D es igual a $D = P^{-1}AP$ donde las columnas de P están formadas por las coordenadas de los vectores de las bases de los respectivos subespacios propios expresadas en la base canónica y A es la matriz del endomorfismo en la base canónica.

Diagonalización por semejanza (continuación)

Ejemplo

Dado el endomorfismo $f(x_1, x_2, x_3) = (-11x_1 - 10x_2 + 5x_3, 4x_2, -15x_1 - 10x_2 + 9x_3)$, estudiar si es diagonalizable y, en caso afirmativo, calcular su diagonalización.

- Calculamos la matriz asociada a f respecto a la base canónica en $\mathbb{R}^3$, obteniendo $A = \begin{pmatrix} -11 & -10 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -15 & -10 & 9 \end{pmatrix}$.
- Para saber si f es diagonalizable tenemos que calcular los autovectores asociados a A, para ello calculamos el polinomio característico: $P(\lambda) = \begin{vmatrix} -11-\lambda & -10 & 5 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -15 & -10 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 24) = -(\lambda - 4)^2(\lambda + 6)$
  Las raíces del polinomio son $\lambda_1 = -6$ y $\lambda_2 = 4$, cuyas multiplicidades algebráicas respectivas son $m_1 = 1$ y $m_2 = 2$.
- Calculamos ahora los subespacios propios:
  Para $\lambda_1 = -6$ tenemos $V_1 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | (A + 6I)\vec{v} = \vec{0}\right\} = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 = x_3, x_2 = 0\right\}$
  Para $\lambda_2 = 4$ tenemos $V_2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | (A - 4I)\vec{v} = \vec{0}\right\} = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\right\}$
  Cuyas bases son, por ejemplo, $\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 1)\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(1, 0, 3), (0, 1, 2)\}$, respectivamente.
  Por lo tanto: $g_1 = \dim(V_1) = 1 = m_1$ y $g_2 = \dim(V_2) = 2 = m_2$se cumple que $g_1 + g_2 = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.
  Como $m_1 = g_1$ y $m_2 = g_2$ el endomorfismo es diagonalizable
- La matriz diagonal es, por lo tanto, $D = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Esta será la matriz de la aplicación f en la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{(1, 0, 1), (1, 0, 3), (0, 1, 2)\}$ y se cumple que $D = P^{-1}AP$ donde $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Diagonalización ortogonal

Existe un tipo de endomorfismo que siempre es diagonalizable: el endomorfismo simétrico.
Este tipo de endomorfismo tiene la particularidad de tener una base ortonormal*, que definiremos posteriormente, en la que diagonalizar su matriz asociada.

Definición

Sea P una matriz cuadrada de elementos reales. Se dice que es **ortogonal** si cumple que:

$$P^t = P^{-1}$$

Propiedades

Si P es ortogonal:

- $|P| = \pm 1$, ya que $\left|PP^t\right| = |P|\left|P^t\right| = |P|^2$ y, por otro lado, $\left|PP^t\right| = \left|PP^{-1}\right| = |\mathbb{I}_n| = 1 \Rightarrow |P|^2 = 1 \Rightarrow |P| = \pm 1$
- Los n vectores columna de P forman una base ortonormal del espacio vectorial V de dimensión $\dim(V) = n$.

* En el siguiente tema veremos en más detalle el concepto de ortonormalidad.

Diagonalización ortogonal (continuación)

Definición

Sea f un endomorfismo del espacio vectorial V de dimensión n. Se dice que f es **simétrico** si

$$\vec{u}^t f(\vec{v}) = f(\vec{u})^t \vec{v}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$$

Importante

Si A es la matriz asociada al endomorfismo f en una base $\mathcal{B}$, entonces f es simétrico si y sólo si A es simétrica.

Demostración:

$$\vec{u}^t f(\vec{v}) = \vec{u}^t A\vec{v} \text{ como } A \text{ es simétrica } A = A^t, \text{ luego } \vec{u}^t A\vec{v} = \vec{u}^t A^t \vec{v} = (A\vec{u})^t \vec{v} = f(\vec{u})\vec{v}$$

Teorema espectral

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n. Sea f un endomorfismo simétrico en dicho espacio vectorial, entonces existe una base ortonormal de V formada por autovectores de f.

Para diagonalizar la matriz asociada al endomorfismo simétrico ortogonalmente tenemos que buscar una base ortonormal de V en la que la matriz D sea diagonal. Para ello uniremos las bases ortonormales de los subespacios propios. La diagonal de la matriz D estará formada por los autovalores de f.

Diagonalización ortogonal (continuación)

Ejemplo

Diagonalizar el siguiente endomorfismo calculando una matriz de autovectores ortogonal: $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 2x_3, -x_2, 2x_1 - x_3)$

- Escribimos la matriz asociada a la aplicación respecto de la base canónica: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

  Esta matriz es simétrica, lo que supone que f es diagonalizable. Buscamos, por tanto, una matriz diagonal D tal que $D = P^{-1}AP = P^tAP$, ya que queremos que P sea ortogonal.
- El polinomio característico de la matriz A es $P(\lambda) = (-1 - \lambda)(\lambda + 2)(\lambda - 3)$.
  Los autovalores son $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ y $\lambda_3 = 3$ y los subespacios asociados a cada uno de ellos son:
  $V_1 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 = x_3 = 0\}, V_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_2 = 0,\ 2x_1 + x_3 = 0\}, V_3 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 = 0,\ 2x_3 - x_1 = 0\}$
- Una base para cada uno de ellos es $\mathcal{B}_1 = \{(0, 1, 0)\}$, $\mathcal{B}_2 = \{(1, 0, -2)\}$ y $\mathcal{B}_3 = \{(2, 0, 1)\}$.
  Estos vectores son ortogonales dos a dos, ya que los autovalores son distintos, pero no son una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ ya que si definimos $P' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|P'\right| = -5 \neq \pm 1$. Si calculamos $P'^t P' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.
  Para que el resultado de este producto dé la matriz identidad es necesario que dividamos por $\sqrt{5}$ el segundo y tercer vector (segunda y tercera columna), obteniendo otros autovectores de V_2 y V_3 (de norma 1), respectivamente.
- Por lo tanto, normalizando los vectores obtenemos $\mathcal{B} = \{(0, 1, 0), (1/\sqrt{5}, 0, -2/\sqrt{5}), (2/\sqrt{5}, 0, 1/\sqrt{5})\}$. Ahora podemos comprobar que dichos vectores son las columnas de una matriz ortogonal P, ya que $PP^t = \mathbb{I}$, y D es la matriz diagonal buscada, así tenemos:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS

1. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$. Hallar los valores propios y vectores propios. Razonar si es diagonalizable y obtener la matriz de paso que permite diagonalizarla.
2. Hallar los valores propios y vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
3. Sea $A = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$. Encontrar una fórmula de recurrencia que dé la potencia n-ésima de la matriz A.
4. Sea la aplicación definida por:

$$f(x, y, z) = (7x - 2y + z, -2x + 10y - 2z, x - 2y + 7z)$$

   Diagonalizar si es posible por un cambio de base ortogonal su matriz asociada A. Indicar la nueva base $\mathbb{R}^3$ a la que está referida la matriz diagonal.
5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$. Estudiar para que valores reales de α y β puede diagonalizarse.
6. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Se pide:
   - Probar que es diagonalizable y encontrar una matriz ortogonal P que permita dicha diagonalización.
   - Diagonalizar A^2 y A^{-1}.

4.3 Aplicaciones de la diagonalización

Potencia y exponencial de una matriz

Sea A una matriz cuadrada de orden k y D una matriz diagonal, tal que $D = P^{-1}AP \Rightarrow A = PDP^{-1}$, entonces la potencia n-ésima de A se puede escribir como

$$A^n = \overbrace{\left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)\cdots\left(PDP^{-1}\right)}^{n)} = PD\left(P^{-1}P\right)D\left(P^{-1}P\right)\cdots\left(P^{-1}P\right)DP^{-1} = PD^nP^{-1}$$

Además, tenemos que si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k^n \end{pmatrix}$

Si queremos calcular la exponencial de una matriz, e^A, podemos escribirla como un desarrollo de Taylor de infinitos sumandos,

$e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}A^i$, y aplicamos lo obtenido anterioremente, tenemos que $e^A = P\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}D^i\right)P^{-1} = Pe^DP^{-1}$

Resumen

Dada una matriz cuadrada A y una matriz diagonal D tal que $D = P^{-1}AP$ tenemos que:

- $A^n = PD^nP^{-1}$
- $e^A = Pe^DP^{-1}$

donde $D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k^n \end{pmatrix}$, $e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_k} \end{pmatrix}$

Potencia y exponencial de una matriz (continuación)

Ejemplo

Calcular $f(A) = A^4 + A^2 + A$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Si obtenemos la matriz diagonal D asociada a A tendremos que $f(A) = PD^4P^{-1} + PD^2P^{-1} + PDP^{-1} = Pf(D)P^{-1}$

$|A - \lambda\mathbb{I}| = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$

Para $\lambda_1 = 2 \Rightarrow$ los autovectores son de la forma $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$

Para $\lambda_2 = -3 \Rightarrow$ los autovectores son de la forma $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix}$

La matriz de paso es $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{pmatrix}$ y la matriz diagonal asociada es $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

$f(D) = D^4 + D^2 + D = \begin{pmatrix} 2^4 + 2^2 + 2 & 0 \\ 0 & (-3)^4 + (-3)^2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 0 \\ 0 & 87 \end{pmatrix} \Rightarrow f(A) =$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22 & 0 \\ 0 & 87 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & 87 \\ 22 & -174 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$f(A) = \begin{pmatrix} 35 & -26 \\ -26 & 74 \end{pmatrix}$

Cadenas de Markov

Consideremos una población que está distribuída en n diferentes estados, y sea $X_i(t)$ el número de individuos de la población que está en el estado i, con $i = 1, \ldots, n$, en un tiempo t (en algunos casos X_i representa la proporción de individuos en el estado i y no su número absoluto). Supongamos que el número de individuos en cada uno de los estados en el instante de tiempo $t+1$ depende exclusivamente del número de ellos que hubiese en cada uno de dichos estados en el tiempo t, existiendo una cierta probabilidad constante de cambio del estado i al estado j dada por p_{ji}, por lo que tendremos que $p_{1i} + p_{2i} + \ldots + p_{ni} = 1$ para $i = 1, \ldots, n$. Entonces, el número de individuos en un tiempo $t+1$, se puede representar en función del número de individuos en el tiempo t mediante el siguiente sistema de ecuaciones matricial:

$$\vec{X}(t+1) = A\vec{X}(t)$$

con $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix}$, $\vec{X}(t+1) = \begin{pmatrix} X_1(t+1) \\ X_2(t+1) \\ \vdots \\ X_n(t+1) \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$, y la suma de los elementos de cada columna de A es 1.

Matriz estocástica (definición)

Una matriz donde cada elemento representa una probabilidad, por lo tanto está comprendido entre 0 y 1, y que la suma de los elementos de cada columna es 1, se denomina *matriz estocástica.*

Cadenas de Markov (definición)

Una cadena de Markov o proceso de Markov* es un modelo en el cual la probabilidad de que ocurra un evento depende solamente de los eventos inmediatamente anteriores y se puede representar matemáticamente de forma matricial como $\vec{X}(t+1) = A\vec{X}(t)$ donde A es una matriz estocástica y $\vec{X}(t)$ es el vector que describe los eventos en un tiempo t

Las cadenas de Markov fueron introducidas por el matemático ruso Andrei Markov en 1907

Cadenas de Markov (continuación)

Definición

Una matriz estocástica A es regular si se cumple que existe alguna potencia A^m tal que todas sus entradas son estrictamente positivas.

Propiedades:

Si A es una matriz estocástica se cumple que:

- $\lambda = 1$ es un autovalor de A
- Todos los autovalores de A cumplen que $|\lambda| \leq 1$
- Si A es regular y diagonalizable, el autovalor $\lambda = 1$ tiene multiplicidad 1
- Si A es regular se cumple que $\lim\limits_{m \to \infty} A^m = A_s$ donde A_s es una matriz con todas sus columnas iguales entre sí.

Cadenas de Markov (continuación)

Evolución de un sistema de Markov

Dado un sistema definido mediante una cadena de Markov, si deseamos saber cuál es la distribución de la población transcurridas m unidades de tiempo desde el tiempo inicial $t = 0$, tendremos $\vec{X}(m) = A\vec{X}(m-1) = A^2\vec{X}(m-2) = \ldots = A^m\vec{X}(0)$.
Para resolver este tipo de sistemas utilizaremos los procedimientos algebraicos desarrollados anteriormente, que permiten calcular de forma sencilla la potencia de una matriz A utilizando su matriz diagonal asociada D, en caso de que exista, y la matriz de paso P

$$\vec{X}(m) = A^m\vec{X}(0) = PD^mP^{-1}\vec{X}(0)$$

Importante

En determinadas circunstancias, el sistema de Markov puede alcanzar una **situación estacionaria**, esto es, converge a un cierto valor $\vec{X}_s$ cuando m se hace grande, o sea, se cumple que $\lim_{m\to\infty} \vec{X}(m) = \vec{X}_s$ y esto es independiente de la distribución inicial de la población $\vec{X}(0)$. Esto sucederá **cuando la matriz estocástica A sea regular**, ya que en este caso $\lim_{m\to\infty} A^m = A_s$ y las columnas de la matriz A_s representan las proporciones que se alcanzarán de cada uno de los estados del sistema.

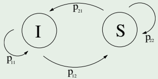
Cadenas de Markov (continuación)

Ejemplo

En una ciudad de 10000 habitantes hay una epidemia. Un cuarto de los que están infectados una semana siguen estándolo a la semana siguiente y que el resto se cura. Además, la mitad de los que están sanos una semana enferman a la siguiente. Si inicialmente hay $I(0) = I_0$ enfermos, calcular ¿cuántos enfermos habrá al cabo de una semana? ¿y al cabo de dos semanas? Si $I(n)$ es el número de enfermos al cabo de n semanas, calcular $I(n)$ y su evolución a la larga.

Si $I(i)$ es el número de enfermos en la semana i y $S(i)$ es el número de sanos en la semana i, el sistema de ecuaciones recursivas es:

$$\left.\begin{aligned} I(i+1) &= 0{,}25I(i) + 0{,}5S(i) \\ S(i+1) &= 0{,}75I(i) + 0{,}5S(i) \end{aligned}\right\}$$



Si definimos $\vec{X}(i) = \begin{pmatrix} I(i) \\ S(i) \end{pmatrix}$ tendremos que: $\vec{X}(i+1) = A\vec{X}(i)$ con $A = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}5 \\ 0{,}75 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

Vemos que la matriz A es regular, por lo tanto, tendrá un estado estacionario. Como $I(0) = I_0$ tendremos que $S(0) = N - S_0$ con $N = 10000$, por lo que $\vec{X}(1) = A\vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}5 \\ 0{,}75 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 \\ N - I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5N - 0{,}25I_0 \\ 0{,}5N + 0{,}25I_0 \end{pmatrix}$

Al cabo de dos semanas tendremos: $\vec{X}(2) = A\vec{X}(1) = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}5 \\ 0{,}75 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}5N - 0{,}25I_0 \\ 0{,}5N + 0{,}25I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}375\,N + 0{,}062\,5I_0 \\ 0{,}625\,N - 0{,}062\,5I_0 \end{pmatrix}$

Para estudiar la evolución a la larga, lo mejor es escribir A en su forma diagonal:

$$|A - \lambda\mathbb{I}| = \begin{vmatrix} 0{,}25 - \lambda & 0{,}5 \\ 0{,}75 & 0{,}5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 0{,}75\lambda - 0{,}25 = (\lambda + 0{,}25)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -0{,}25 \text{ y } \lambda_2 = 1$$

Para $\lambda_1 = -0{,}25 \Rightarrow (A + 0{,}25\mathbb{I})\,\vec{u}_1 = \vec{0} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}75 & 0{,}75 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$

Para $\lambda_2 = 1 \Rightarrow (A - \mathbb{I})\,\vec{u}_2 = \vec{0} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -0{,}75 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}75 & -0{,}5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2\alpha/3 \\ \alpha \end{pmatrix}$

Cadenas de Markov (continuación)

Ejemplo (continuación)

La matriz diagonal asociada a A es $D = \begin{pmatrix} -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz de paso $P = \begin{pmatrix} -1 & 2/3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, por lo que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2/3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{-3}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2/3 & -1 \end{pmatrix}^{t} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Con estas matrices tenemos que $A = PDP^{-1}$, por lo que:

$$A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-0{,}25)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2/3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-0{,}25)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -(-0{,}25)^n & \frac{2}{3} \\ (-0{,}25)^n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}(-0{,}25)^n + \frac{2}{5} & -\frac{2}{5}(-0{,}25)^n + \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5}(-0{,}25)^n + \frac{3}{5} & \frac{2}{5}(-0{,}25)^n + \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, cuando hayan transcurrido n semanas tendremos que:

$$\vec{X}(n) = A^n \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}(-0{,}25)^n + \frac{2}{5} & -\frac{2}{5}(-0{,}25)^n + \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5}(-0{,}25)^n + \frac{3}{5} & \frac{2}{5}(-0{,}25)^n + \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 \\ N - I_0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} I_0\left(\frac{3}{5}(-0{,}25)^n + \frac{2}{5}\right) + (N - Ix)\left(-\frac{2}{5}(-0{,}25)^n + \frac{2}{5}\right) \\ I_0\left(-\frac{3}{5}(-0{,}25)^n + \frac{3}{5}\right) + (N - I_0)\left(\frac{2}{5}(-0{,}25)^n + \frac{3}{5}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0(-0{,}25)^n + N\left(-\frac{2}{5}(-0{,}25)^n + \frac{2}{5}\right) \\ -I_0(-0{,}25)^n + N\left(\frac{2}{5}(-0{,}25)^n + \frac{3}{5}\right) \end{pmatrix}$$

Para calcular la evolución a la larga tenemos que calcular el límite cuando n tiende a infinito. Como $\lim\limits_{n\to\infty} (-0{,}25)^n = 0$ tendremos que

$\vec{X}(\infty) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}N \\ \frac{3}{5}N \end{pmatrix}$, por lo que a la larga $\frac{2}{5}$ de la población estará enferma y $\frac{3}{5}$ sana.

Cadenas de Markov (continuación)

Ejemplo

«How Google works: Markov chains and eigenvalues»
Originating author is Christiane Rousseau. From its very beginning, Google became "the" search engine. This comes from the supremacy of its ranking algorithm: the PageRank algorithm. Indeed, with the enormous quantity of pages on the World-Wide-Web, many searches end up with thousands or millions of results. If these are not properly ordered, then the search may not be of any help, since no one can explore millions of entries.

http://blog.kleinproject.org/?p=280

En este ejemplo se explica cómo funciona el algoritmo de búsqueda de Google, que se basa en la clasificación de las páginas web según los accesos que tienen. La clasificación de las páginas web se basa en una cadena de Markov que tiene en cuenta los porcentajes de accesos a través de los enlaces entre páginas web.

Teorema de Cayley-Hamilton

Teorema de Cayley-Hamilton

Toda matriz A satisface su polinomio característico.

Supongamos que la matriz A se puede escribir como $A = PDP^{-1}$, donde D es la matriz diagonal asociada $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Si $p(X)$ es el polinomio característico y calculamos $p(A)$, podemos escribir

$$p(A) = p(PDP^{-1}) = Pp(D)P^{-1} = P \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p(\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = 0$$

Teorema de Cayley-Hamilton (continuación)

Ejemplo

Sea $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ la forma diagonal asociada a la matriz A. Calcular:

$$2A^4 - 7A^3 + 9A^2 - 5A + \mathbb{I}$$

Como el polinomio característico de A es el mismo que el de una matriz semejante a ella, es igual al polinomio característico de D, que es:

$$P = (1-\lambda)^2\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) = -\left(\lambda^3 - \frac{5}{2}\lambda^2 + 2\lambda - \frac{1}{2}\right)$$

Por el teorema de Cayley-Hamilton se cumple que:

$$-\left(A^3 - \frac{5}{2}A^2 + 2A - \frac{1}{2}\mathbb{I}\right) = 0 \Rightarrow 2A^3 - 5A^2 + 4A - \mathbb{I} = 0 \Rightarrow 2A^4 - 5A^3 + 4A^2 - A = 0$$

Por lo tanto

$$2A^4 - 7A^3 + 9A^2 - 5A + \mathbb{I} = \left(2A^4 - 5A^3 + 4A^2 - A\right) - 2A^3 + 5A^2 - 4A + \mathbb{I} = 0$$

EJERCICIOS

1. Calcular aplicando el teorema de Cayley-Hamilton la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Considerando la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y A la matriz asociada a un endomorfismo referida a dicha base, se sabe que los subespacios

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\} \text{ y } V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y = 0, z - y = 0\}$$

están asociados respectivamente a los autovalores $\lambda = 1$ y $\lambda = \frac{1}{2}$. Calcular:

- La matriz diagonal asociada al endomorfismo.
- Calcular la matriz $M = 2A^4 - 7A^3 + 9A^2 - 5A + \mathbb{I}$
- Calcular la matriz $N = A^{-3} - 4A^{-2} + 5A^{-1} + 4\mathbb{I}$

3. Describir razonadamente las *dinámicas fundamentales* del movimiento de un móvil de ecuaciones:

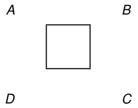
$$\begin{cases} x_{t+1} = \frac{5}{2}x_t + 3y_t \\ y_{t+1} = -\frac{3}{2}x_t - 2y_t \\ z_{t+1} = -6x_t - 6y_t - \frac{1}{2}z_t \end{cases}$$

donde $\{x_t, y_t, z_t\}$ representa las coordenadas de la posición del móvil en t-ésima transición.

- Si el móvil inicialmente se encuentra en el punto $(1, 0, 1)$ donde se encuentra en la vigésima transición.
- ¿Existen posiciones invariantes?
- ¿Qué ocurre a largo plazo si la posición inicial se encuentra en la recta que pasa por el origen y tiene la dirección del vector $(-1, 1, 0)$ o la del vector $(0, 0, 1)$?

PROBLEMAS

1. En Soria hay dos supermercados de alimentación, Villar y Muñoz. Se sabe que el 70 % de los que van a comprar al supermercado Villar vuelven a comprar al año siguiente, pasándose el 30 % a la competencia. Análogamente, el 60 % de los que compran un año en el autoservicio Muñoz vuelven a comprar en dicho establecimiento al año próximo, pasándose el 40 % restante a comprar al supermercado Villar. En el año 2001 entraron 1200 clientes en el supermercado Muñoz. ¿Cuántos clientes entraron en el supermercado Villar en el año 2001 si en el año 2002 entraron el mismo número de clientes en ambos establecimientos?
2. Siendo x_0 e y_0 las poblaciones iniciales de conejos y zorros respectivamente, se sabe que el número de conejos en cualquier mes es la mitad de la población de conejos del mes anterior y que el número de zorros en dicho mes es la suma de la población de zorros más la mitad de la de conejos en el mes anterior. Calcular las poblaciones de zorros y conejos a largo plazo. ¿Se extinguirá alguna de las especies mencionadas? Razonar la respuesta.
3. Un estudio realizado sobre la comunidad de ingenieros en electrónica revela el hecho siguiente: el 90 % de los hijos de padres ingenieros en electrónica cursan estudios de ingeniería en electrónica y sólo el 20 % de los que no lo hicieron consiguen que sus hijos cursen dicha carrera. ¿Cuál será el porcentaje de estudiantes que cursarán la carrera de ingeniería en electrónica después de muchas generaciones suponiendo un sólo hijo como descendencia en cada familia?
4. Una agencia naviera tiene su flota distribuída entre los puertos de Barcelona, Málaga y Mallorca. De los barcos que al comienzo de cada mes están en Barcelona, al final del mes sólo vuelve la mitad, un 20 % se va a Málaga y el resto a Mallorca; de los que están en Málaga, a fin de mes un 20 % se va a Barcelona, un 40 % a Mallorca y el resto vuelve a Málaga; y de los que estaban a principio de mes en Mallorca, un 80 % regresa y el resto va a Barcelona. Suponiendo que la flota es constante:
   - Plantear en forma matricial un modelo que represente la distribución de la flota.
   - Sabiendo que en el instante actual hay 350, 500 y 200 barcos en Barcelona, Málaga y Mallorca, respectivamente, determinar el número de barco que habrá en cada puerto al cabo de k meses.
   - ¿Cuál será la flota de barcos en cada puerto a largo plazo?.
5. Una rana que se encuentra en el vértice de un cuadrado tiene probabilidad $1/2$ de ir, de un salto, a cada vértice contiguo. Si inicialmente está en el vértice A, hallar la probabilidad de que se encuentre en cada uno de los vértices después de n saltos.



Tema 4: Diagonalización de Endomorfismos

Introducción

Material complementario

Esta sección es material complementario al temario del curso y se incluye en estos apuntes por completitud del tema de diagonalización.

Hemos visto que no todas las matrices son diagonalizables. Esto ocurre cuando en una matriz A la dimensión del subespacio invariante generado por un autovalor no coincide con la multiplicidad del autovalor.

$$\dim(S_1(\lambda_i)) = g_i < m_i$$

donde λ_i es una raíz del polinomio característico de multiplicidad m_i.

Nuestro objetivo ahora es encontrar una matriz J lo más sencilla posible (diagonal por bloques), semejante a la matriz cuadrada A, es decir, que exista una matriz regular (invertible) P tal que

$$J = P^{-1}AP$$

A esta matriz J la denominaremos **forma canónica de Jordan**

Forma canónica de Jordan de orden 2

Consideremos una matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Caso A Las raíces del polinomio característico son distintas $\lambda_1 \neq \lambda_2$. En este caso la forma canónica de Jordan de A coincide con la matriz diagonal:

$$J = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Caso B El polinomio característico tiene una raíz doble λ_0. Calculamos el subespacio invariante asociado $S_1(\lambda_0) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 | (A - \lambda_0\mathbb{I})\vec{v} = \vec{0}\} = \ker(A - \lambda_0\mathbb{I})$

- Si $\dim(S_1(\lambda_0)) = 2$ entonces existe una base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovectores, A es diagonalizable y la forma canónica de Jordan es:

$$J = D = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

Forma canónica de Jordan de orden 2 (continuación)

- Si $\dim(S_1(\lambda_0)) = 1$ entonces no hay una base de $\mathbb{R}^2$ de autovectores de A y aplicamos que si A tiene dos autovalores iguales λ_0 entonces $(A - \lambda_0\mathbb{I})^2 = 0$, ya que si λ_0 es autovalor doble, el polinomio característico será $(\lambda - \lambda_0)^2 = 0$ y por el teorema de Cayley-Hamilton sabemos que la matriz A satisface su polinomio característico, por lo que $(A - \lambda_0\mathbb{I})^2 = 0 \Rightarrow \ker((A - \lambda_0\mathbb{I})^2) = \mathbb{R}^2$. Definimos el subespacio $S_2(\lambda_0) = \ker((A - \lambda_0\mathbb{I})^2) = \mathbb{R}^2$. Como $\dim(S_1(\lambda_0)) = 1$ podemos encontrar un vector $\vec{u}_2$ tal que $\vec{u}_2 \in S_2(\lambda_0) - S_1(\lambda_0)$ es decir, un vector $\vec{u}_2 \in S_2(\lambda_0)$, pero $\vec{u}_2 \notin S_1(\lambda_0)$. Podemos tomar $\vec{u}_1$ tal que:
$$(A - \lambda_0\mathbb{I})\vec{u}_2 = \vec{u}_1$$
y cumplirá que $\vec{u}_1 \in S_1(\lambda_0)$ porque $(A - \lambda_0\mathbb{I})\vec{u}_1 = (A - \lambda_0\mathbb{I})^2\vec{u}_2 = \vec{0}$. Además $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son linealmente independientes y ninguno es el vector nulo, por tanto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ son una base de $\mathbb{R}^2$. En esta base tenemos:
$$(A - \lambda_0\mathbb{I})\vec{u}_1 = \vec{0} \Rightarrow A\vec{u}_1 = \lambda_0\vec{u}_1$$
$$(A - \lambda_0\mathbb{I})\vec{u}_2 = \vec{u}_1 \Rightarrow A\vec{u}_2 = \vec{u}_1 + \lambda_0\vec{u}_2$$
Por lo tanto la matriz de la aplicación lineal en esta base es:
$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

Forma canónica de Jordan de orden 2 (continuación)

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$, calcular la forma de Jordan asociada y la matriz de paso

Calculamos los autovalores $|A - \lambda\mathbb{I}| = 0 \Rightarrow (\lambda - 6)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 6$ doble
Calculamos $(A - 6\mathbb{I})\vec{u} = \vec{0}$ y obtenemos el autovector $\vec{u} = (\alpha, \alpha)$ y el subespacio invariante $S_1(6) = \ker(A - 6\mathbb{I}) = \{(\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^2 | \alpha \in \mathbb{R}\}$ con $\dim(S_1(6)) = 1$, por lo tanto, la forma de canónica de Jordan será $J = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$
Tomamos $\vec{u}_2 \in S_2(6) - S_1(6)$, por ejemplo, $\vec{u}_2 = (1, 0)$ y calculamos
$(A - 6\mathbb{I})\vec{u}_2 = \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}_1 = (-1, -1)$, por lo que la matriz de paso será
$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, con $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Forma canónica de Jordan de orden 2 (continuación)

Proposición

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ siempre se puede encontrar una matriz $J \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de alguna de las formas siguientes:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

y una matriz $P \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de determinante no nulo (invertible) tal que:

$$A = PJP^{-1}$$

Forma canónica de Jordan de orden 3

Consideremos ahora una matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Caso A Las raíces del polinomio característico son distintas $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$. En este caso la matriz A es diagonalizable y su forma canónica de Jordan coincide con la matriz diagonal.

$$J = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Caso B $\lambda_1 = \lambda_2$ es una raíz doble y λ_3 es una raíz simple.

- Si $\dim(S_1(\lambda_1)) = 2$ entonces A es diagonalizable y en este caso la matriz de Jordan asociada a la matriz A es la matriz diagonal.

$$J = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

- Si $\dim(S_1(\lambda_1)) = 1$ entonces con $S_1(\lambda_1)$ y $S_1(\lambda_3)$ no se genera un conjunto de vectores que sean base de todo el espacio $\mathbb{R}^3$. De nuevo calculamos $S_2(\lambda_1) = \ker((A - \lambda_1\mathbb{I})^2)$ y considerando $(A - \lambda_1\mathbb{I})\vec{u}_2 = \vec{u}_1$ elegimos $\vec{u}_2 \in S_2(\lambda_1) - S_1(\lambda_1)$. Tomamos $\vec{u}_3 \in S_1(\lambda_3)$. El conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ sí es una base de $\mathbb{R}^3$, la matriz asociada a A en la nueva base es:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Forma canónica de Jordan de orden 3 (continuación)

Ejemplo

Calcular la forma de Jordan y la matriz de paso de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculamos los autovalores $|A - \lambda \mathbb{I}| = 0 \Rightarrow (2-\lambda)^2(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$

Para $\lambda_1 = 2$ tenemos $S_1(2) = \ker(A - 2\mathbb{I}) = \{(\alpha, 0, \alpha) \in \mathbb{R}^3 | \alpha \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim(S_1(2)) = 1$ y $S_2(2) = \ker((A-2\mathbb{I})^2) = \{(\alpha - \beta, \beta, \alpha) \in \mathbb{R}^3 | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim(S_2(2)) = 2$

Tomamos $\vec{u}_2 = (1, -1, 0) \in S_2(2) - S_1(2) \Rightarrow \vec{u}_1 = (A - 2\mathbb{I})\vec{u}_2 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}_1 = (1, 1, 0)$$

Para $\lambda_2 = 1$ tenemos $S_1(1) = \ker(A - \mathbb{I}) = \{(0, 0, \alpha) \in \mathbb{R}^3 | \alpha \in \mathbb{R}\}$

La forma de Jordan asociada es $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Forma canónica de Jordan de orden 3 (continuación)

Caso C λ_0 es una raíz triple del polinomio característico:

- Si $\dim(S_1(\lambda_0)) = 3$ entonces A es diagonalizable y en este caso la matriz de Jordan asociada a la matriz A es la matriz diagonal.

$$J = D = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

- Si $\dim(S_1(\lambda_0)) = 2$, calculamos $S_2(\lambda_0) = \ker((A - \lambda_0\mathbb{I})^2)$, buscamos $\vec{u}_3 \in S_2(\lambda_0) - S_1(\lambda_0)$ y tal que $\vec{u}_2 = (A - \lambda_0\mathbb{I})\vec{u}_3 \in S_1(\lambda_0)$. Como $S_1(\lambda_0)$ es un espacio de dimensión 2, podemos encontrar $\vec{u}_1 \in S_1(\lambda_0)$ linealmente independiente de $\vec{u}_2 \in S_1(\lambda_0)$, que a su vez es linealmente independiente de $\vec{u}_3$. De este modo tendremos que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, que cumple que:

$$\begin{aligned} A\vec{u}_1 &= \lambda_0\vec{u}_1 \\ A\vec{u}_2 &= \lambda_0\vec{u}_2 \\ A\vec{u}_3 &= \vec{u}_2 + \lambda_0\vec{u}_3 \end{aligned}$$

En dicha base la matriz semenjante a A es la forma de Jordan siguiente:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

Forma canónica de Jordan de orden 3 (continuación)

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, calculad la matriz de Jordan asociada

$|A - \lambda\mathbb{I}| = 0 \Rightarrow (1+\lambda)^3 = 0$, por lo tanto $\lambda = -1$ es un autovalor triple.

Además $S_1(-1) = \ker(A+\mathbb{I}) = \{(\alpha - \beta, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim(S_1(-1)) = 2$ y

$(A+\mathbb{I})^2 = 0 \Rightarrow S_2(-1) = \ker((A+\mathbb{I})^2) \equiv \mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim(S_2(-1)) = 3$
Tomamos, por ejemplo, $\vec{u}_3 = (0, 0, 1) \in S_2(-1) - S_1(-1) \Rightarrow \vec{u}_2 = (A+\mathbb{I})\vec{u}_3 =$
$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}_2 = (-1, 0, 1) \in S_1(-1)$ y elegimos $\vec{u}_1 \in S_1(-1)$ linealmente independiente de $\vec{u}_2$, por ejemplo, $\vec{u}_1 = (1, 1, 0)$.

Entonces $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, con $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Forma canónica de Jordan de orden 3 (continuación)

- Si $\dim(S_1(\lambda_0)) = 1$, calculamos $S_2(\lambda_0) = \ker((A - \lambda_0\mathbb{I})^2)$. Tendremos que $\dim(S_2(\lambda_0)) = 2$ y, por tanto, $S_2(\lambda_0)$ no cubre todo $\mathbb{R}^3$ y deberemos calcular $S_3(\lambda_0) = \ker((A - \lambda_0\mathbb{I})^3)$, donde de forma similar al caso de orden 2 tenemos que $(A - \lambda_0\mathbb{I})^3 = 0$, por tanto $S_3(\lambda_0) = \mathbb{R}^3$. Elegimos $\vec{u}_3 \in S_3(\lambda_0) - S_2(\lambda_0)$ y tomamos

$$\vec{u}_2 = (A - \lambda_0\mathbb{I})\vec{u}_3 \quad \text{y} \quad \vec{u}_1 = (A - \lambda_0\mathbb{I})\vec{u}_2$$

Se da la siguiente relación de inclusión

$$S_1(\lambda_0) \subsetneq S_2(\lambda_0) \subsetneq S_3(\lambda_0) = \mathbb{R}^3$$

Ahora $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ sí son base de $\mathbb{R}^3$ y en esta base tenemos que:

$$\begin{aligned} A\vec{u}_1 &= \lambda_0\vec{u}_1 \\ A\vec{u}_2 &= \vec{u}_1 + \lambda_0\vec{u}_2 \\ A\vec{u}_3 &= \vec{u}_2 + \lambda_0\vec{u}_3 \end{aligned}$$

por lo tanto la matriz de Jordan asociada será:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

Forma canónica de Jordan de orden 3 (continuación)

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, calculad la matriz de Jordan y la de paso

El polinomio característico de la matriz es $|A - \lambda\mathbb{I}| = (1 - \lambda)^3$, por lo tanto $\lambda = 1$ es una raíz triple y

además obtenemos $S_1(1) = \ker(A - \mathbb{I}) = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3 | \alpha \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim(S_1(1)) = 1$

$S_2(1) = \ker((A - \mathbb{I})^2 = \{(\alpha, \beta, \alpha) \in \mathbb{R}^3 | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim(S_2(1)) = 2$

$(A - \mathbb{I})^3 = 0 \Rightarrow S_3(1) = \ker((A - \mathbb{I})^3) \equiv \mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim(S_3(1)) = 3$

Elegimos $\vec{u}_3 = (0, 0, 1) \in S_3(1) - S_2(1) \Rightarrow \vec{u}_2 = (A - I)\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\vec{u}_2 = (1, 0, 1) \in S_2(1) - S_1(1) \Rightarrow$

$\vec{u}_1 = (A - \mathbb{I})\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}_1 = (1, 1, 1) \in S_1(1)$

Con estos vectores construimos la base $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y tenemos $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Forma canónica de Jordan de orden n

Ahora ya estamos preparados para calcular la matriz de Jordan asociada a una matriz de cualquier orden.
Primero de todo denominaremos matriz elemental de Jordan de orden k y autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ a la matriz $J_k(\lambda)$ cuyos elementos son todos nulos, excepto los de la diagonal principal, que toman el valor λ y los situados inmendiatamente encima de la diagonal que serán 1:

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Llamaremos matriz de Jordan a cualquier matriz cuadrada formada por la yuxtaposición de matrices elementales a lo largo de la diagonal principal, de la forma:

$$\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{k_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

A continuación veamos como calcular la matriz de Jordan en un caso general a la vez que lo compaginamos con un ejemplo.

Forma canónica de Jordan de orden n (continuación)

Consideremos el espacio vectorial V de dimensión n y el endomorfismo $f : V \longrightarrow V$

Primer paso Calculamos la matriz asociada a la base canónica ya que es la más fácil de calcular en caso de que nos den las ecuaciones paramétricas o cartesianas del endomorfismo. O si nos dan la matriz de f asociada a cualquier otra base trataremos en ese caso de diagonalizarla. En cualquier caso, supongamos que conocemos la matriz asociada al endomorfismo, $f(\vec{x}) = A\vec{x}$Lo primero que haremos entonces es calcular su polinomio característico y sus raíces:

$$P(\lambda) = |A - \lambda\mathbb{I}| = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

en este caso tenemos r raíces distintas, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, con multiplicidades algebráicas $m_1, m_2, \dots, m_r$, respectivamente. Recordad que debe verificarse lo siguiente:

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = \dim(V) = n$$

Ejemplo - Primer Paso

Supongamos el siguiente endomorfismo $f : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 8 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 8 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 1 & 6 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 8 & 2 \\ 7 & -1 & 1 & -1 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Calculamos el polinomio característico:
$P(\lambda) = |A - \lambda\mathbb{I}| = 262144 - 196608\lambda + 61440\lambda^2 - 10240\lambda^3 + 960\lambda^4 - 48\lambda^5 + \lambda^6 = (\lambda - 8)^6$ de manera que tenemos un único autovalor $\lambda = 8$ de multiplicidad algebráica $m = 6 = \dim(\mathbb{R}^6)$.

Forma canónica de Jordan de orden n (continuación)

Segundo paso Para cada autovalor λ (omitimos los subíndices para no hacer engorrosa la notación), calculamos la siguiente cadena de subespacios: $\{\vec{0}\} \subset S_1(\lambda) \subseteq S_2(\lambda) \subseteq \cdots \subseteq S_m(\lambda)$ donde $S_k(\lambda) = \ker((A - \lambda\mathbb{I})^k)$. A partir de m, multiplicidad algebráica de λ, o incluso antes, la cadena se estabiliza, es decir, existe un número $p \leq m$ tal que para todo $n \geq p$ se tiene lo siguiente: $S_n(\lambda) = S_p(\lambda)$
A $S_p(\lambda)$ se le denomina *subespacio máximo invariante* asociado al autovalor λ. Calculamos $n_k = \dim(S_k(\lambda))$, donde $k = 1, 2, \ldots, p$, que cumple que $0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_p = m$
Por lo tanto tendremos $S_1(\lambda) \subsetneq S_2(\lambda) \subsetneq \cdots \subsetneq S_p(\lambda) = S_{p+1}(\lambda) = \ldots = S_m(\lambda)$

Ejemplo - Segundo Paso

Calculamos $S_1(\lambda = 8) = \ker(A - 8\mathbb{I}) = \left\{\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6 | (A - 8\mathbb{I})\vec{v} = \vec{0}\right\} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 7 & -1 & 1 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_4 - x_6 \\ x_2 = x_4 - x_5 - x_6 \\ x_3 = -5x_4 + 2x_5 + 5x_6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_1(8) = \left\{(\gamma - \alpha, \gamma - \beta - \alpha, -5\gamma + 2\beta + 5\alpha, \gamma, \beta, \alpha) \in \mathbb{R}^6 | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}$$

Así que, $\dim(\ker(A - 8\mathbb{I})) = \dim(S_1(8)) = n_1 = 3 < m = 6$. Calculamos ahora $S_2(8) = \ker((A - 8\mathbb{I})^2 = \left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^6 | (A - 8\mathbb{I})^2\vec{v} = \vec{0}\right\} \Rightarrow$

$$(A - 8\mathbb{I})^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 + x_5 \Rightarrow S_2(8) = \left\{(\epsilon + \beta, \epsilon, \delta, \gamma, \beta, \alpha) \in \mathbb{R}^6 | \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{R}\right\}$$

Por tanto, $\dim(\ker(A - 8\mathbb{I})) = n_1 < \dim(\ker((A - 8\mathbb{I})^2)) = n_2 = 5 < m = 6$. Calculamos entonces $S_3(8) = \ker((A - 8\mathbb{I})^3)$ y como $(A - 8\mathbb{I})^3 = 0 \Rightarrow \ker((A - 8\mathbb{I})^3) = \mathbb{R}^6$. En este caso $p = 3$ de manera que $S_3(8)$ y tendremos que $n_3 = 6 = m$ es en este caso el *subespacio máximo invariante*.

Forma canónica de Jordan de orden n (continuación)

Tercer paso Supongamos que $S_p(\lambda) = V$ es el subespacio máximo invariante, con $p \leq m$ y $S_{p-1}(\lambda) \subsetneq S_p(\lambda)$. Primero buscamos $d_p = \dim(S_p(\lambda)) - \dim(S_{p-1}(\lambda)) = n_p - n_{p-1}$ vectores linealmente independientes $\vec{u}_i \in S_p(\lambda) - S_{p-1}(\lambda)$, $i = n_{p-1} + 1, \dots, n_p$. Con estos vectores calculamos $(A - \lambda\mathbb{I})\vec{u}_i$, $i = n_{p-1} + 1, \dots, n_p$, que son d_p vectores linealmente independientes en $S_{p-1}(\lambda) - S_{p-2}(\lambda)$ y dado que $d_{p-1} = \dim(S_{p-1}(\lambda)) - \dim(S_{p-2}(\lambda)) = n_{p-1} - n_{p-2} \geq d_p$ completamos el conjunto anterior con $d_{p-1} - d_p$ vectores linealmente independientes de los anteriores en $S_{p-1}(\lambda) - S_{p-2}(\lambda)$. Ahora, con el conjunto de d_{p-1} vectores linealmente independientes, repetimos el procedimiento de obtener d_{p-1} vectores de la forma $(A - \lambda\mathbb{I})\vec{u}_i$, $i = n_{p-2} + 1, \dots, n_{p-1}$ y completamos hasta $d_{p-2} = \dim(S_{p-2}(\lambda)) - \dim(S_{p-1}(\lambda)) = n_{p-2} - n_{p-1} \geq d_{p-1}$ vectores linealmente independientes en $S_{p-2}(\lambda) - S_{p-3}(\lambda)$. Continuamos el proceso hasta obtener los autovectores del subespacio $S_1(\lambda)$. Con todos los conjuntos de vectores obtenidos tenemos el conjunto $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{p} \left\{\vec{u}_{n_{j-1}+1}, \dots, \vec{u}_{n_j}\right\}$, que es una base del subespacio máximo invariante $S_p(\lambda) = V$ con dimensión $\dim(S_p(\lambda)) = m$ y en la cual la matriz del endomorfismo es

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Forma canónica de Jordan de orden n (continuación)

Ejemplo - Tercer Paso

En nuestro ejemplo tenemos que $\dim(S_1(8)) = d_1 = n_1 = 3$, $\dim(S_2(8)) - \dim(S_1(8)) = d_2 = n_2 - n_1 = 2$ y $\dim(S_3(8)) - \dim(S_2(8)) = d_3 = n_3 - n_2 = 1$.

Tomamos un vector de $S_3(8) - S_2(8)$, por ejemplo $\vec{u}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y con él construímos $\vec{u}_5 = (A - 8\mathbb{I})\vec{u}_6 \in S_2(8) - S_1(8) \Rightarrow$

$$\vec{u}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 7 & -1 & 1 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Con este vector $\vec{u}_5$ construimos otro vector linealmente independiente en $S_1(8)$ calculando

$$\vec{u}_4 = (A - 8\mathbb{I})\vec{u}_5 \in S_1(8) \Rightarrow \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 7 & -1 & 1 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Forma canónica de Jordan de orden n (continuación)

Ejemplo - Tercer Paso (continuación)

Como $\dim(S_2(8)) - \dim(S_1(8)) = d_2 = n_2 - n_1 = 2$ y sólo tenemos un vector $\vec{u}_5 \in S_2(8) - S_1(8)$ necesitamos encontrar otro vector $\vec{u}_3 \in S_2(8) - S_1(8)$ linealmente independiente, por ejemplo, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$ y con él calculamos $\vec{u}_2 = (A - 8\mathbb{I})\vec{u}_3 \in S_1(8) \Rightarrow$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 7 & -1 & 1 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1\\-1\\-1\\7\\2\\6 \end{pmatrix}$$

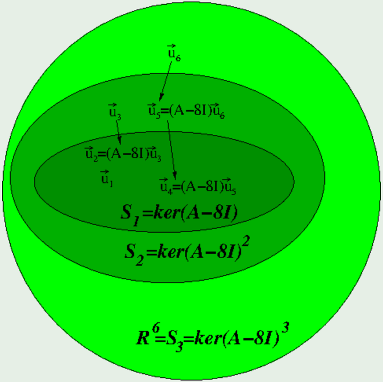
Por último, como $n_1 = \dim(S_1(8)) = 3$ y sólo tenemos dos vectores en este subespacio, $\vec{u}_4$ y $\vec{u}_2$, tenemos que encontrar otro autovector $\vec{u}_1$ linealmente independiente, por ejemplo (tomando $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = -1$), tenemos $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1\\1\\-5\\0\\0\\-1 \end{pmatrix}$

El conjunto de vectores $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5, \vec{u}_6\}$ forman una base de $\mathbb{R}^6$. Calculamos cual es la matriz asociada al endomorfismo respecto de esta base sabiendo que:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}_5 = (A - 8\mathbb{I})\vec{u}_6 \Rightarrow A\vec{u}_6 = \vec{u}_5 + 8\vec{u}_6 \\ \vec{u}_4 = (A - 8\mathbb{I})\vec{u}_5 \Rightarrow A\vec{u}_5 = \vec{u}_4 + 8\vec{u}_5 \\ \vec{u}_4 \in S_1(\lambda = 8) \Rightarrow A\vec{u}_4 = 8\vec{u}_4 \\ \vec{u}_2 = (A - 8\mathbb{I})\vec{u}_3 \Rightarrow A\vec{u}_3 = \vec{u}_2 + 8\vec{u}_3 \\ \vec{u}_2 \in S_1(\lambda = 8) \Rightarrow A\vec{u}_2 = 8\vec{u}_2 \\ \vec{u}_1 \in S_1(\lambda = 8) \Rightarrow A\vec{u}_1 = 8\vec{u}_1 \end{array}\right\} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} 8&0&0&0&0&0 \\ 0&8&1&0&0&0 \\ 0&0&8&0&0&0 \\ 0&0&0&8&1&0 \\ 0&0&0&0&8&1 \\ 0&0&0&0&0&8 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Forma canónica de Jordan de orden n (continuación)

Ejemplo - Tercer Paso (continuación)



Cálculo de las cajas de Jordan

Para cada autovalor realizaremos el siguiente cálculo.
Supongamos que λ es un autovalor de multiplicidada algebráica m. Puede ocurrir:

1. $\dim(S_1(\lambda)) = n_1 = m$
   En este caso existen m autovectores linealmente independientes asociados a λ que forman una base de $S_1(\lambda)$ y la matriz del endomorfismo asociada a dicha base es

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ & m) & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

2. $\dim(S_1(\lambda)) = n_1 < m$
   a) Calculamos la cadena de subespacios $\{\vec{0}\} \subset S_1(\lambda) \subsetneq S_2(\lambda) \subsetneq \cdots \subsetneq S_p(\lambda)$
   siendo el *subespacio máximo invariante* $S_p(\lambda)$, donde $p \leq m$ y $n_j = \dim(S_j(\lambda))$, $j = 1, 2, \ldots, p$.
   Sabemos también que $\dim(S_j(\lambda) - S_{j-1}(\lambda)) = d_j = n_j - n_{j-1}$, $j = 1, 2, \ldots, p$ donde $d_1 = n_1$ además se verifica lo siguiente:

$$d_j + n_{j-2} \leq n_{j-1} \quad \Rightarrow \quad d_j \leq n_{j-1} - n_{j-2} = d_{j-1} \quad \Rightarrow \quad d_p \leq d_{p-1} \leq \cdots \leq d_1$$

   b) Tenemos la siguiente información:
   - d_p nos indica las cajas de Jordan de orden p
   - $d_{p-1} - d_p$ nos indica las cajas de Jordan de orden $p-1$

     $\vdots$
   - $d_1 - d_2$ nos indica las cajas de Jordan de orden 1

Cálculo de las cajas de Jordan (continuación)

Ejemplo

Supongamos que disponemos de la siguiente información $A \in \mathcal{M}_{12\times 12}$ donde $|A-\lambda\mathbb{I}| = (\lambda-1)^4(\lambda-2)^6(\lambda+1)^2$

$$\begin{array}{lll} rg(A-\mathbb{I}) = 10; & \dim(S_1(2)) = 3; & rg(A+\mathbb{I}) = 11; \\ rg((A-\mathbb{I})^2) = 9; & \dim(S_2(2)) = 6; & rg((A+\mathbb{I})^2) = 10; \\ rg((A-\mathbb{I})^3) = 8 & & \end{array}$$

y queremos construir la matriz de Jordan.

- $\lambda = 1$ es un autovalor de multiplicidad algebráica 4.

  Como $rg(A-\mathbb{I}) = 10$ entonces $n_1 = \dim(S_1(1)) = 12 - 10 = 2 < 4$

  Como $rg((A-\mathbb{I})^2) = 9$ entonces $n_2 = \dim(S_2(1)) = 12 - 9 = 3 < 4$

  Como $rg((A-\mathbb{I})^3) = 8$ entonces $n_3 = \dim(S_3(1)) = 12 - 8 = 4$

  Tenemos entonces que: $\left.\begin{array}{l} d_3 = n_3 - n_2 = 1 \\ d_2 = n_2 - n_1 = 1 \\ d_1 = 2 \end{array}\right\}$

  Por tanto tenemos: $d_3 = 1$ cajas de Jordan de orden 3, $d_2 - d_3 = 0$ cajas de Jordan de orden 2, $d_1 - d_2 = 1$ cajas de Jordan de orden 1

Cálculo de las cajas de Jordan (continuación)

Ejemplo (continuación)

- $\lambda = 2$ es un autovalor de multiplicidad algebráica 6.
  Tenemos $n_1 = \dim(S_1(2)) = 3$ y $n_2 = \dim(S_2(2)) = 6$ de manera que: $\left.\begin{array}{l} d_2 = n_2 - n_1 = 3 \\ d_1 = 3 \end{array}\right\}$
  Por tanto tenemos: $d_2 = 3$ cajas de Jordan de orden 2, $d_1 - d_2 = 0$ cajas de Jordan de orden 1
- $\lambda = -1$ es un autovalor de multiplicidad algebráica 2.

  Como $rg(A + \mathbb{I}) = 11$ entonces $n_1 = \dim(S_1(-1)) = 12 - 11 = 1 < 2$

  Como $rg((A + \mathbb{I})^2) = 10$ entonces $n_2 = \dim(S_2(-1)) = 12 - 10 = 2$

  Tenemos entonces: $\left.\begin{array}{l} d_2 = n_2 - n_1 = 1 \\ d_1 = 1 \end{array}\right\}$
  Por tanto: $d_2 = 1$ cajas de Jordan de orden 2, $d_1 - d_2 = 0$ cajas de Jordan de orden 1
- Ya podemos construir la matriz de Jordan asociada al endomorfismo:

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & & & & & & & & & \\
0 & 1 & 1 & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & 2 & 1 & & & & & & \\
 & & & & 0 & 2 & & & & & & \\
 & & & & & & 2 & 1 & & & & \\
 & & & & & & 0 & 2 & & & & \\
 & & & & & & & & 2 & 1 & & \\
 & & & & & & & & 0 & 2 & & \\
 & & & & & & & & & & -1 & 1 \\
 & & & & & & & & & & 0 & -1
\end{pmatrix}$$

Potencia y exponencial de una matriz

Potencia y exponencial de una matriz

Sea A una matriz cuadrada de orden n y J su forma de Jordan tal que $J = P^{-1}AP$, entonces:

1. $A^k = PJ^kP^{-1}$
2. $e^A = Pe^JP^{-1}$

- Si J es una matriz diagonal, entonces:

$$J^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} \qquad e^J = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

- Si J no es diagonal, entonces:

$$J^k = \begin{pmatrix} \boxed{J_1^k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{J_2^k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{J_n^k} \end{pmatrix} \qquad e^J = \begin{pmatrix} \boxed{e^{J_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{e^{J_2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{e^{J_n}} \end{pmatrix}$$

Potencia y exponencial de una matriz (continuación)

Donde e^{J_i} se calcula de la siguiente forma: sea $J_i = (\lambda_i \mathbb{I} + N_i)$ y n_i el orden de J_i, donde

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $e^{J_i} = e^{\lambda_i} e^{N_i}$:

$$e^{J_i} = e^{\lambda_i} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n_i-2)!} & \frac{1}{(n_i-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{1!} & \cdots & \frac{1}{(n_i-3)!} & \frac{1}{(n_i-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{1}{(n_i-4)!} & \frac{1}{(n_i-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Potencia y exponencial de una matriz (continuación)

Ejemplo

Sea J la siguiente matriz:

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

tenemos entonces que:

$$e^J = \begin{pmatrix} e^3 & e^3 & \frac{1}{2}\,e^3 & \frac{1}{6}\,e^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^3 & e^3 & \frac{1}{2}\,e^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 & e^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS

1. Reducir la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ a su forma de Jordan y dar la matriz de paso.
2. Encontrar la forma canónica de Jordan y el cambio de base correspondiente de las siguientes matrices:

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(b) } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{(c) } C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Demostrar que la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$f(x, y, z) = (x + z, 2y + z, 3z - x)$$

no es diagonalizable.

4. Hallar según los valores de a y b la forma canónica de Jordan de la siguiente matriz: $\begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
5. Calcular e^A, donde $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
6. Sea la matriz $A \in \mathcal{M}_{15\times 15}$ donde $|A - \lambda\mathbb{I}| = (\lambda - 3)^5(\lambda + 2)^4(\lambda + 1)^3(\lambda - 1)^3$

$$rg(A - 3\mathbb{I}) = 12; \qquad \dim(S_1(-2)) = 2; \qquad \dim(S_1(1)) = 1$$

$$rg((A - 3\mathbb{I})^2) = 10; \qquad \dim(S_2(-2)) = 4; \qquad \dim(S_2(1)) = 2$$

$$rg(A + \mathbb{I}) = 12;$$

construir la matriz de Jordan.

5.1 Definición de Espacio Euclídeo

Introducción

Una gran variedad de hechos geométricos se basan principalmente en la posibilidad de medir las longitudes de segmentos y los ángulos entre ellos. En los espacios vectoriales no se incluyen los conceptos *longitud* y *ángulo*. Lo que vamos hacer a continuación es añadir esas dos nuevas palabras a la estructura de espacio vectorial para dotarle de una nueva estructura matemática que contenga conceptos que no se pueden describir en el *lenguaje de espacio vectorial*.

Para ello definiremos en el espacio vectorial un tipo de multiplicación que llamaremos **producto escalar**. Será una operación no interna ya que la multiplicación de dos vectores no será un vector sino un escalar y a través de este producto escalar introduciremos los conceptos de *longitud* de un vector y de *ángulo* entre vectores.

Cuando trabajamos con un cualquier espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ definíamos el producto escalar del siguiente modo:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

A partir de este producto escalar podíamos definir la *norma de un vector*:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

y el *ángulo* que forman dos vectores:

$$\cos\theta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|}$$

Nosotros vamos a generalizar esta definición de producto escalar.

Definiciones

Producto escalar

El **producto escalar** de dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de un espacio vectorial V es una operación no interna, denotada por $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$, que asigna un número real a cada par de vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$, $\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, y que cumple las siguientes propiedades:

1. Simétrica: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$ para todo $\vec{x}$ e $\vec{y} \in V$
2. Distributiva: $\langle \vec{x}, \vec{y} + \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle$ para todo $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$
3. $\langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ para todo $\vec{x}$ e $\vec{y} \in V$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ para todo $\vec{x} \neq 0$.

Espacio euclídeo

Todo espacio vectorial que esté dotado de un producto escalar se denomina **espacio euclídeo.**

Definiciones (continuación)

Ejemplo

Considerar la aplicación $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 4x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + x_2y_2$, demostrar que es un producto escalar.

- Podemos ver que $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$ (simétrica)
- $\langle \vec{x}, \vec{y} + \vec{z} \rangle = 4x_1(y_1 + z_1) - x_2(y_1 + z_1) - x_1(y_2 + z_2) + x_2(y_2 + z_2) =$ $4x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + x_2y_2 + 4x_1z_1 - x_2z_1 - x_1z_2 + x_2z_2 = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle$ (propiedad distributiva)
- $\langle \lambda\vec{x}, \vec{y} \rangle = 4\lambda x_1y_1 - \lambda x_2y_1 - \lambda x_1y_2 + \lambda x_2y_2 = \lambda(4x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + x_2y_2) = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$
- $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 4x_1x_1 - x_2x_1 - x_1x_2 + x_2x_2 = 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2 + 3x_1^2 > 0$

Definiciones (continuación)

Ejemplos

1. Supongamos dos vectores en $\mathbb{R}^2$, $\vec{x} = (x_1, x_2)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2)$ y definimos

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_1 + y_2 x_1 + 2 y_2 x_2$$

Esta aplicación de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ es un producto escalar. Comprobarlo como ejercicio.

2. Supongamos $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ y definimos $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1$.
Esto no es un producto escalar en $\mathbb{R}^2$. Comprobarlo como ejercicio.

3. Sea $\mathcal{C}([a, b])$ el espacio de las funciones reales continuas definidas en el intervalo $[a, b]$, y definimos el siguiente producto escalar de las funciones $f(x)$ y $g(x)$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx$$

Se puede comprobar fácilmente que $\mathcal{C}([a, b])$ es un espacio euclídeo. Demostrarlo como ejercicio.

Matriz del producto escalar

Supongamos un espacio euclídeo E de dimensión finita n y sea $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ una base de E. En esta base tenemos que

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i, \qquad \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{e}_i$$

utilizando las propiedades (2) y (3) del producto escalar tenemos que:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i, \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{e}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle$$

esto se puede reescribir como:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T P_{\mathcal{B}} \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_n, \vec{e}_1 \rangle \\ \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \vec{e}_1, \vec{e}_n \rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_n \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_n, \vec{e}_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Matriz del producto escalar (continuación)

Definición

La matriz

$$P_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_n, \vec{e}_1 \rangle \\ \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \vec{e}_1, \vec{e}_n \rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_n \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_n, \vec{e}_n \rangle \end{pmatrix}$$

recibe el nombre de matriz del producto escalar con respecto a la base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$.

La matriz del producto escalar es siempre simétrica y todos los elementos de su diagonal principal son positivos.

Matriz del producto escalar (continuación)

Importante

Una matriz cuadrada P podrá representar un producto escalar si ***simétrica y definida positiva***.

Una matriz es definida positiva si todos sus autovalores son positivos o, de forma equivalente, si todos sus menores principales son positivos.

Definimos los menores principales de una matriz dada $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ como los determinantes:

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, \quad A_n = |A|$$

Matriz del producto escalar (continuación)

Ejemplo

Comprobar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ puede representar un producto escalar y obtener la forma algebraica de dicho producto escalar.

Calculamos los autovalores de la matriz A:
$|A - \lambda\mathbb{I}| = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162 = (3-\lambda)(6-\lambda)(9-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9.$
Como todos los autovalores son positivos (definida positiva) y la matriz es simétrica podemos asegurar que representará un producto escalar.
También podíamos haber comprobado que es definida positiva calculando los menores principales:

$$A_{11} = 5 > 0,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 35 > 0,\ A_{33} = |A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 13 \\ 0 & 7 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 5 & 13 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 162 > 0$$

La expresión algebraica la obtendremos al hacer el producto:

$$\vec{x}^T A\vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5y_1 - 2y_3 \\ 7y_2 + 2y_3 \\ -2y_1 + 2y_2 + 6y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 5x_1y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + 7x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + 6x_3y_3$$

Longitudes, Ángulos y Ortogonalidad

Norma de un vector

La longitud, norma o módulo de un vector $\vec{x}$ en un espacio euclídeo E se define como

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}, \qquad \vec{x} \in E$$

Ejemplo

Considerando las funciones reales continuas definidas en el intervalo $[a, b]$, tendríamos que la norma de una función f sería

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, dx}, \qquad f \in \mathcal{C}([a, b])$$

Vector unitario

Todo vector de norma uno se denomina *unitario*, y todo vector $\vec{x}$ no nulo de un espacio euclídeo puede normalizarse simplemente dividiendo por su norma.

Una vez definido un producto escalar podemos definir la bola unidad como todos aquellos vectores $\vec{x} \in E$ tales que $\|\vec{x}\| \leq 1$, mientras que la esfera unidad serán todos aquellos vectores tales que $\|\vec{x}\| = 1$.

Importante

Tanto la bola como la esfera unitaria dependerán del producto escalar que estemos considerando.

Longitudes, Ángulos y Ortogonalidad (continuación)

Ejemplo

Considerando el producto escalar definido anteriormente, cuya matriz es $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ calcular la norma del vector $\vec{x} = (-2, 2, -2)$ y obtener un vector unitario a partir de $\vec{x}$

Calculamos $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \|\vec{x}\|^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{x}\|^2 = 40 \Rightarrow \|\vec{x}\| = 2\sqrt{10}$

Por lo tanto, un vector unitario lo podemos obtener como $\vec{u} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \left(\frac{-\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{-\sqrt{10}}{10} \right)$

Longitudes, Ángulos y Ortogonalidad (continuación)

Ángulo entre vectores

Dados dos vectores cualesquiera pertenecientes a un espacio euclídeo E, definimos el coseno del ángulo que forman entre ellos dos como:

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|}$$

Está expresión tiene sentido si el valor absoluto de este cociente es menor o igual a 1, de donde se deduce la siguiente proposición.

Desigualdad de Schwarz

En todo espacio euclídeo E, $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|$ para todo $\vec{x}$ e $\vec{y} \in E$.

Con el producto escalar dado en $\mathbb{R}^n$ la desigualdad de Schwarz se escribe: $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| = \left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2}$

y en el espacio euclídeo $\mathcal{C}([a,b])$ tenemos $\left| \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b (f(x))^2\, dx} \sqrt{\int_a^b (g(x))^2\, dx}$

Ortogonalidad

Dos vectores de un mismo espacio euclídeo $\vec{x}, \vec{y} \in E$ son *ortogonales* o *perpendiculares* si su producto escalar es cero: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$

Cuando trabajamos con el producto escalar usual y consideramos los espacios euclídeos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, la idea de ortogonalidad coincide con el hecho de que los vectores formen un ángulo de $\pi/2$ radianes (90°).

Longitudes, Ángulos y Ortogonalidad (continuación)

Ejemplo

Considerando el producto escalar definido anteriormente, cuya matriz es $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ calcular el ángulo formado por los vectores $\vec{x} = (-2, 2, -2)$ e $\vec{y} = (-1, 1, 3)$ y comprobar que los vectores $\vec{x}$ y $\vec{z} = (2, 0, -3)$ son ortogonales.

Calculamos $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 \\ 13 \\ 22 \end{pmatrix} = 4.$

Anteriormente habíamos visto que $\|\vec{x}\| = 2\sqrt{10}$, así que calculamos ahora la norma de $\vec{y}$:

$$\|\vec{y}\|^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 90 \Rightarrow \|\vec{y}\| = 3\sqrt{10}$$

Por lo tanto $\cos\left(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}\right) = \cos\theta = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|} = \frac{4}{2\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10}} = \frac{1}{15} \Rightarrow \theta = 1{,}5$ radianes

Comprobamos ahora que $\vec{x}$ y $\vec{z}$ son ortogonales:

$$\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ -6 \\ -22 \end{pmatrix} = 0$$

Como el producto escalar es nulo, quiere decir que estos vectores son ortogonales

Distancia entre puntos de $\mathbb{R}^n$

Por analogía con $\mathbb{R}^n$, podemos generalizar el concepto de distancia entre dos puntos $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, que con el producto escalar habitual se define como $d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$, como la norma del vector diferencia $\vec{x} - \vec{y}$, siendo $\vec{x}$ e $\vec{y}$ los vectores cuyas coordenadas son las coordenadas de los puntos X e Y, respectivamente.

Distancia entre dos puntos de $\mathbb{R}^n$

Dados dos puntos $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $X(y_1, y_2, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ y dada una definición de producto escalar entre elementos del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, $\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dado por la matriz A, definimos distancia entre X e Y a la norma del vector diferencia $\vec{x} - \vec{y}$, siendo $\vec{x}$ e $\vec{y}$ los vectores cuyas coordenadas son las coordenadas de los puntos X e Y, respectivamente, o sea, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

$$d(X, Y) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(\vec{x} - \vec{y})^T A (\vec{x} - \vec{y})}$$

Propiedades

Se puede comprobar fácilmente que la distancia entre dos puntos cumple que:

- Es una función simétrica: $d(X, Y) = d(Y, X)$
- La distancia de un punto a sí mismo es nula: $d(X, X) = 0$
- La distancia de un punto al origen O es la norma del vector: $d(X, O) = \|\vec{x}\|$
- La desigualdad triangular: $d(X, Y) + d(Y, Z) \geq d(X, Z)$

Distancia entre puntos de $\mathbb{R}^n$ (continuación)

Ejemplo

Dado el producto escalar en $\mathbb{R}^2$ definido por la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ calcular la distancia entre los puntos $X(2,3)$ e $Y(-2,1)$

Para el cálculo de la distancia tenemos que obtener primero la diferencia de los vectores $\vec{x} = (2,3)$ e $\vec{y} = (-2,1)$, que será $\vec{x} - \vec{y} = (4,2)$

Ahora calculamos el producto escalar de $\vec{x} - \vec{y}$ por sí mismo:

$$\langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} \rangle = \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = (\vec{x} - \vec{y})^T A (\vec{x} - \vec{y}) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} = 52$$

Por lo tanto, $d(X, Y) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{52}$

EJERCICIOS

1. Si los vectores no nulos $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, ..., $\vec{x}_n$ son todos ortogonales entre sí en un espacio euclídeo, demostrar que también son linealmente independientes.
2. ¿Cuáles de las siguientes funciones $\langle \ , \ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definen un producto escalar?:
   - $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 2y_1 x_2 - 3x_1 y_2$
   - $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2$
   - $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 3y_1 x_2 + 7x_2 y_2$
   - $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_1 y_2 + 3y_1 x_2$
   - $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2 + 2x_1 y_2 + 2y_1 x_2$

   Justificar la respuesta. Encontrar la matriz, en la base canónica, de aquellas funciones que sean producto escalar.
3. Encontrar la expresión analítica del módulo de un vector y del coseno del ángulo de dos vectores en $\mathbb{R}^2$ para aquellas de las funciones de ejercicio 2, que sean producto escalar.
4. Dada la siguiente matriz
$$\begin{pmatrix} 37 & 10 & -4 \\ 10 & 28 & 14 \\ -4 & 14 & 25 \end{pmatrix}$$
   - Verificar que define un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ respecto de la base canónica.
   - Hallar el producto escalar de los vectores $\vec{x} = (1, 0, 1)$, $\vec{y} = (0, 1, -2)$.
   - Hallar un vector ortogonal al vector $\vec{x} = (1, 0, 1)$.
5. Se considera el espacio vectorial de los polinomios de segundo grado, $P_2[x] = \{ax^2 + bx + c, \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}\}$, y dados dos elementos de $P_2[x]$, se define la operación
$$\langle p(x) \cdot q(x) \rangle = \int_0^1 [p(t) \cdot q(t)]\, dt$$
   - Demostrar que se ha definido así un producto escalar en $P_2[x]$.
   - Calcular el producto escalar de $p(x) = x$ y $q(x) = 1 - x$.
6. En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ de las matrices reales de orden 3, demostrar que $\langle A, B \rangle = traza\left(AB^t\right)$ es un producto escalar.

Definiciones

Base Ortonormal

En un espacio euclídeo E una base se dice **ortogonal** si todos sus elementos son ortogonales dos a dos, si además todos los elementos de la base son de norma unitaria se dice que la base es **ortonormal**.
Vamos a probar que en todo espacio euclídeo existen bases ortogonales, para ello vamos a utilizar un *proceso de ortogonalización* que permite obtener una base ortogonal a partir de cualquier base del espacio vectorial. Este proceso es denominado **proceso de Gram-Schmidt**.

Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

Teorema

Sean $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \ldots$ una sucesión finita o infinita de vectores linealmente independientes en un espacio euclídeo E y sea $L_k = \mathcal{L}\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k\right)$, el subespacio vectorial generado por los k primeros vectores. Entonces, existe un conjunto de vectores $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_k, \ldots$ tal que:

1. El subespacio vectorial $L_k' = \mathcal{L}\left(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_k\right)$ coincide con $L_k = \mathcal{L}\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k\right)$ para todo entero positivo k.
2. El vector $\vec{y}_{k+1}$ es ortogonal a L_k para todo entero positivo k.

Cuando decimos que $\vec{y}_{k+1}$ es ortogonal a L_k lo que queremos decir es que $\vec{y}_{k+1}$ es ortogonal a todos los vectores de L_k.

Importante

En todo espacio euclídeo E de dimensión finita existen bases ortonormales.

El procedimiento de Gram-Schmidt permite la construcción de una base ortogonal

Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt (continuación)

Ejemplo: Ortogonalización de Gram-Schmidt

Dados los vectores $\vec{x}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{x}_2 = (4, -2, 0)$ y $\vec{x}_3 = (1, 1, 5)$ vamos a construir a través del **método de ortogonalización de Gram-Schmidt** tres vectores $\vec{y}_1$, $\vec{y}_2$ e $\vec{y}_3$ tres vectores ortogonales entre sí, cuando en $\mathbb{R}^3$ consideramos en producto escalar usual.

1. Tomamos $\vec{y}_1 = \vec{x}_1$

2. Buscamos $\vec{y}_2 = \vec{x}_2 + \alpha\vec{y}_1$ eligiendo α de manera que $\vec{y}_1$ e $\vec{y}_2$ sean ortogonales:

   $0 = \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_2 = \vec{y}_1 \cdot (\vec{x}_2 + \alpha\vec{y}_1) = (\vec{y}_1 \cdot \vec{x}_2) + \alpha\,(\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_1)$

   de donde se deduce que $\alpha = -\dfrac{(\vec{y}_1 \cdot \vec{x}_2)}{(\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_1)} = -\dfrac{(\vec{y}_1 \cdot \vec{x}_2)}{\|\vec{y}_1\|^2} = -\dfrac{(1,0,0)\cdot(4,-2,0)}{1} = -4$

   de manera que $\vec{y}_2 = (4, -2, 0) - 4\,(1, 0, 0) = (0, -2, 0)$

3. Finalmente tomamos $\vec{y}_3 = \vec{x}_3 + \beta_1\vec{y}_1 + \beta_2\vec{y}_2$ y elegimos β_1 y β_2 de manera que $\vec{y}_3$ sea ortogonal a $\vec{y}_1$ e $\vec{y}_2$

   $0 = \vec{y}_3 \cdot \vec{y}_1 = (\vec{x}_3 + \beta_1\vec{y}_1 + \beta_2\vec{y}_2) \cdot \vec{y}_1 = (\vec{x}_3 \cdot \vec{y}_1) + \beta_1\,(\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_1)$

   de donde tenemos que $\beta_1 = -\dfrac{(\vec{x}_3 \cdot \vec{y}_1)}{(\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_1)} = -\dfrac{(\vec{x}_3 \cdot \vec{y}_1)}{\|\vec{y}_1\|^2} = -\dfrac{(1,1,5)\cdot(1,0,0)}{1} = -1$

   Por otro lado $0 = \vec{y}_3 \cdot \vec{y}_2 = (\vec{x}_3 + \beta_1\vec{y}_1 + \beta_2\vec{y}_2) \cdot \vec{y}_2 = (\vec{x}_3 \cdot \vec{y}_2) + \beta_2\,(\vec{y}_2 \cdot \vec{y}_2)$

   de esta manera tenemos $\beta_2 = -\dfrac{(\vec{x}_3 \cdot \vec{y}_2)}{(\vec{y}_2 \cdot \vec{y}_2)} = -\dfrac{(\vec{x}_3 \cdot \vec{y}_2)}{\|\vec{y}_2\|^2} = -\dfrac{(1,1,5)\cdot(0,-2,0)}{4} = \dfrac{1}{2}$

   por tanto $\vec{y}_3 = (1, 1, 5) - (1, 0, 0) + \frac{1}{2}\,(0, -2, 0) = (0, 0, 5)$

   Por tanto $\{\vec{y}_1 = (1, 0, 0)\ , \vec{y}_2 = (0, -2, 0)\ , \vec{y}_3 = (0, 0, 5)\}$ es una base ortogonal con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$.

EJERCICIOS

1. Sean $\vec{x}_1 = (-2, -2, 1)$, $\vec{x}_2 = (0, -1, 0)$ y $\vec{x}_3 = (1, -1, 0)$ tres vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$. Definimos un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ afirmando que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ son una base ortonormal. Encontrar la expresión analítica de este producto escalar en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
2. Sean $\vec{x}_1 = (1, 2, 0, 0)$, $\vec{x}_2 = (1, 0, 0, 2)$, y $\vec{x}_3 = (1, -1, -1, 2)$ tres vectores de $\mathbb{R}^4$. Sea $W = L(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ el subespacio engendrado por $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$.
   - Encontrar una base ortonormal $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de W usando el método de Gram-Schmidt de ortonormalización.
   - Extender la base encontrada a una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$.
3. Sean $\vec{x}_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\vec{x}_2 = (0, 3, -2, 1)$, $\vec{x}_3 = (1, 1, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$. Encontrar todos los vectores de la forma $\vec{x}_3 + \alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ que sean ortogonales a $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ simultáneamente.
4. Sean $\vec{a} = (1, 2, 0, -1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, -1, 1, 0)$, $\vec{c} = (0, 0, 1, 2, 1) \in \mathbb{R}^5$. Descomponer $\vec{c}$ en dos vectores, uno de ellos combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y el otro ortogonal al anterior.
5. Encontrar una base ortogonal en el espacio $P_2[x] = \{ax^2 + bx + c, \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}\}$ de los polinomios de grado menor o igual que 2 en el intervalo $[-1, 1]$ donde se ha definido el siguiente producto escalar para todo $p(x), q(x) \in P_2[x]$:
$$\langle p(x) \cdot q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)\, q(t)\, dt$$
6. Construir una base ortonormal para el espacio o subespacio vectorial dado
   - $H = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 0\right\}$
   - H es el espacio de soluciones de
$$\left.\begin{array}{r} x - 3y + z = 0 \\ -2x + 2y - 3z = 0 \\ 4x - 8y + 5z = 0 \end{array}\right\}$$

5.3 Proyección ortogonal

Subespacios Ortogonales

Definición

Diremos que dos subespacios W_1 y W_2 de un espacio vectorial euclídeo E son **ortogonales**, $W_1 \perp W_2$, si todos los vectores de W_1 son ortogonales a todos los vectores de W_2.

Propiedades

1. W_1 y W_2 son ortononales si y sólo si todos los vectores de una base de W_1 son ortogonales a cada uno de los vectores de una base de W_2.
2. Si $W_1 \perp W_2$ se tiene que $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$

Complemento ortogonal

Dado un subespacio vectorial W de un espacio euclídeo E el conjunto

$$W^{\perp} = \{\vec{y} \in E \text{ tal que } \vec{y} \perp \vec{x} \text{ para todo } \vec{x} \in W\}$$

es un subespacio vectorial de E, que recibe el nombre de **complemento ortogonal** de W.

Proposición

Sea W un subespacio vectorial de un espacio euclídeo E, entonces E es suma directa de W y $W^{\perp}$:

$$E = W \oplus W^{\perp}$$

De esta proposición se deduce que $\dim(W) + \dim\left(W^{\perp}\right) = \dim(E)$

Subespacios Ortogonales (continuación)

Ejemplo

Dado el subespacio S generado por $\{\vec{u}_1 = (1,1,0), \vec{u}_2 = (1,0,1)\}$, calcular su complemento ortogonal, teniendo en cuenta el producto escalar habitual.

Para ello primero buscamos aquellos vectores $\vec{x}$ tales que $\langle \vec{x}, \vec{u}_1 \rangle = 0$ y $\langle \vec{x}, \vec{u}_2 \rangle = 0$, por lo tanto

$$\left.\begin{array}{l}\langle \vec{x}, \vec{u}_1 \rangle = 0\\ \langle \vec{x}, \vec{u}_2 \rangle = 0\end{array}\right\} \begin{array}{c}(\,x_1\ x_2\ x_3\,)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 0\\ (\,x_1\ x_2\ x_3\,)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 0\end{array}\Bigg\} \left.\begin{array}{l}x_1 + x_2 = 0\\ x_1 + x_3 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\1&0&1&0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&-1&0\end{array}\right) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix}-\alpha\\ \alpha\\ \alpha\end{pmatrix}$$

Así que una base del complemento ortogonal de S será, por ejemplo,
$\mathcal{B}_{S_\perp} = \{(-1,1,1)\} \Rightarrow S_\perp = \left\{(-\alpha, \alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3 | \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

Subespacios Ortogonales (continuación)

Proyección ortogonal de un vector

La proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre $\vec{y}$, $P_{\vec{y}}\left(\vec{x}\right)$, es un vector en la dirección de $\vec{y}$ cuyo módulo es la componente de $\vec{x}$ en la dirección de $\vec{y}$, como dicha componente es $\left\|\vec{x}\right\| \cos\theta$, siendo $\cos\theta = \frac{\langle\vec{x},\vec{y}\rangle}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}$, tendremos que:

$$P_{\vec{y}}\left(\vec{x}\right) = \left\|\vec{x}\right\| \cos\theta \frac{\vec{y}}{\left\|\vec{y}\right\|} = \frac{\langle\vec{x},\vec{y}\rangle}{\left\|\vec{y}\right\|}\frac{\vec{y}}{\left\|\vec{y}\right\|} \Rightarrow P_{\vec{y}}\left(\vec{x}\right) = \frac{\langle\vec{x},\vec{y}\rangle}{\langle\vec{y},\vec{y}\rangle}\vec{y}$$

Descomposición ortogonal de un vector

Si W es un subespacio del espacio euclídeo E, sabemos que $E = W \oplus W^{\perp}$, por tanto $\vec{x} \in E$ posee una descomposición única de la forma $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ donde $\vec{y} = P_W\left(\vec{x}\right) \in W$ y $\vec{z} = P_{W^\perp}\left(\vec{x}\right) \in W^{\perp}$, de manera que $\vec{y}$ será la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre W, mientras que $\vec{z}$ será la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre $W^{\perp}$.

El ángulo θ que forma un vector $\vec{x} \in E$ con un subespacio vectorial W se define como el ángulo que forma $\vec{x}$ con $P_W\left(\vec{x}\right)$. Por lo tanto, tendremos que:

$$\cos\theta = \frac{\langle\vec{x}, P_W\left(\vec{x}\right)\rangle}{\left\|\vec{x}\right\|\,\left\|P_W\left(\vec{x}\right)\right\|} = \frac{\langle\vec{y}+\vec{z},\vec{y}\rangle}{\left\|\vec{x}\right\|\,\left\|\vec{y}\right\|} = \frac{\left\|\vec{y}\right\|^2}{\left\|\vec{x}\right\|\,\left\|\vec{y}\right\|} = \frac{\left\|\vec{y}\right\|}{\left\|\vec{x}\right\|} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\left\|P_W\left(\vec{x}\right)\right\|}{\left\|\vec{x}\right\|}$$

Expresión matricial del vector proyección sobre un subespacio

Matriz de proyección sobre un subespacio

Sea S un subespacio vectorial generado por el conjunto de vectores linealmente independientes $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$ del espacio euclídeo E. Construímos la matriz A cuyas columnas están formadas por las coordenadas de los vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$, entonces la proyección de cualquier vector sobre el subespacio S viene dada por

$$P_S(\vec{x}) = A(A^t\, P\, A)^{-1} A^t\, P\, \vec{x}$$

donde P es la matriz del producto escalar definido en el espacio euclídeo.

$P_S = A(A^t\, P\, A)^{-1} A^t\, P$ es la matriz proyección asociada al subespacio S

Propiedades de la matriz proyección

1. $P_S^2 = P_S$, es decir, la matriz proyección es idempotente.
2. Cuando consideramos el producto escalar habitual tenemos $P_S = A(A^t\, A)^{-1} A^t$ y entonces se cumple que $P_S^t = P_S$, es decir, P_S es simétrica.

Expresión matricial del vector proyección sobre un subespacio (continuación)

Ejemplo

Calcular la proyección ortogonal de los vectores $\vec{x} = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ e $\vec{y} = (1, 2, -1) \in \mathbb{R}^3$ sobre el subespacio S generado por $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$, teniendo en cuenta el producto escalar habitual.

Para ello primero calculamos la matriz de la proyección sobre S, teniendo en cuenta que $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$P_S = A\left(A^t A\right)^{-1} A^t$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Por lo tanto $P_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$P_S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Así, la proyección de $\vec{x}$ sobre S es: $P_S(\vec{x}) = P_S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_S(\vec{x}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Y la proyección de $\vec{y}$ sobre S será:

$P_S(\vec{y}) = P_S \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_S(\vec{y}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{y}$ ya que $\vec{y} \in S$

EJERCICIOS

1. Probar que dado un subespacio vectorial W de un espacio euclídeo E, y sea $\vec{x} \in E$. Si $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ con $\vec{y} \in W$, se tiene que

$$\|\vec{z}\| \geq \left\| P_{W^{\perp}}(\vec{x}) \right\|$$

2. Encontrar el complemento ortogonal del subespacio W de E cuando:
   - $E = \mathbb{R}^3$, W es el espacio generado por $\vec{u} = (1, 0, 1)$ y $\vec{v} = (2, -1, 1)$
   - $E = \mathbb{R}^4$, $W = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ y } 2x_1 - x_2 = 0\right\}$

   En ambos se considera el producto escalar usual.
3. En los siguientes apartados se dan un subespacio H y un vector $\vec{v}$, en cada caso encontrar $P_H(\vec{v})$, una base ortonormal para $H^{\perp}$, y escribir $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ donde $\vec{a} \in H$ y $\vec{b} \in H^{\perp}$
   - $H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\right\}$, $\vec{v} = (-1, 2)$
   - $H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3x - 2y + 6z = 0\right\}$, $\vec{v} = (-3, 1, 4)$
   - $H = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | x = y, w = 3y\right\}$, $\vec{v} = (-1, 2, 3, 1)$
4. Sea $\vec{F} = (1, 1, 1)$ el vector de la fuerza que mueve una masa puntual a lo largo de la recta $(x, y, z) = \lambda(0, 1, 2)$. Calcular la proyección de $\vec{F}$ sobre la recta.
5. Hallar la matriz proyección para el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1, 1, 1, 1)$ y $(0, 1, 2, -1)$. Hallar la proyección de los vectores $\vec{u} = (1, -2, 1, 0)$, $\vec{v} = (2, -1, -4, 5)$ y $\vec{w} = (1, 0, 1, 0)$ sobre el subespacio anterior. Interpretar el resultado.
6. En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar cuya matriz respecto a la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   y el subespacio $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = -z = y\}$.
   - Calcular el ángulo que forman los vectores $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$
   - Encontrar una base de $U^{\perp}$.
   - Encontrar la proyección ortogonal de $(1, -2, 0)$ sobre $U^{\perp}$.

9 788409 501458