Álgebra Lineal:

Apuntes para Estudiantes Universitarios

Susana López González
&
M. Ángeles Gómez Flechoso

ISBN: 978-84-695-3476-2

Índice general

Capítulo 1

Matrices y Determinantes

1.1. Matrices: definiciones

- Llamamos matriz de orden o dimensión $m \times n$ sobre el cuerpo conmutativo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ a todo conjunto de $m \times n$ elementos de $\mathbb{R}$ dispuestos en m filas y n columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m,n}$$

  donde a_{ij} será el elemento de la fila i y de la columna j. Denotaremos el conjunto de las matrices $m \times n$ por $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$.

- Diremos que una matriz es *rectangular* $n \neq m$ y diremos que es *cuadrada* si $n = m$, es decir, tiene el mismo número de filas que de columnas.

- Diremos que es una *matriz fila* si $m = 1$, y una *matriz columna* si $n = 1$.

- Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, su *diagonal principal* es el conjunto de los elementos de la forma (a_{ii}) donde $i = 1, 2, ..., n$.

- Llamaremos *traza* de una matriz a la suma de los elementos de la diagonal principal:

$$Traza\,(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

  Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -9 \\ 3 & 8 & 4 & 5 \\ -5 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad Traza\,(A) = 12$$

1.1.1. Matrices Cuadradas

Diremos que una matriz cuadrada es:

- **Diagonal** cuando los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son todos nulos.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- **Triangular superior** (respectivamente **triangular inferior**) cuando todos los elementos situados por debajo (respectivamente por encima) de la diagonal principal son todos nulos:

$$T_{\text{sup}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad T_{\text{inf}} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$T_S = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad T_I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

- **Simétrica** cuando coinciden los elementos situados simétricamente respecto a la matriz principal:

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad \text{para todo } i, j = 1, 2, ..., n$$

Ejemplo:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

- **Antisimétrica** cuando los elementos situados simétricamente respecto a la matriz principal son opuestos:

  $$a_{ij} = -a_{ji} \qquad \text{para todo } i, j = 1, 2, ..., n$$

  en consecuencia, los elementos de la diagonal principal de una matriz antisimétrica son todos nulos.

  Ejemplo:

  $$S = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ -5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

- La matriz compuesta por unos en su diagonal principal la denominaremos **matriz unidad**:

  $$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

1.2. Suma de matrices y producto por un escalar

Diremos que las matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ son iguales si

$$a_{ij} = b_{ij} \qquad \text{para todo } i = 1, 2, ..., m \ , j = 1, 2, ..., n$$

Dadas dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, definimos la suma de $A + B$ como aquella matriz C cuyos elementos son de la forma

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \text{para todo } i = 1, 2, ..., m \ , j = 1, 2, ..., n$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 9 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -9 \\ 9 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Definimos el producto de una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ como la matriz resultante de multiplicar cada elemento de A por el escalar λ

$$\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij})_{m,n}$$

Ejemplo:

$$3\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & -3 \\ 0 & -6 & 9 \\ -12 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

1.3. Producto de matrices

Dadas dos matrices $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$, definimos el producto matricial de $A \cdot B$ como a la matriz $C \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ de manera que el elemento c_{ij} de C es el la suma del producto de los elementos de la fila i de A con los elementos de la columna j de B.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

¡Ojo! El producto de matrices rectangulares no es conmutativo, e incluso cuando las matrices son cuadradas el producto no tiene por que ser conmutativo.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA+bD & aB+bE & aC+bF \\ cA+dD & cB+dE & cC+dF \\ eA+fD & eB+fE & eC+fF \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 & -3 & -4 \\ 14 & 20 & -1 & -10 \end{pmatrix}$$

1.4. Matriz transpuesta

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ definimos la matriz transpuesta como aquella que se obtiene intercambiando las filas de la matriz A por columnas, la denotamos por $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -8 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -8 \\ 8 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.4.1. Propiedades:

- $(A^t)^t = A$
- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(\lambda A)^t) = \lambda A^t$
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
- Sea A una matriz cuadrada entonces $A+A^t$ y $A \cdot A^t$ son simétricas y $A-A^t$ es antisimétrica.

- Toda matriz simétrica se puede descomponer de forma única como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica de modo único:

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^t + A - A^t\right) = \frac{1}{2}\left(A + A^t\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^t\right)$$

1.5. Matrices elementales

Sea la matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, se pueden realizar operaciones elementales con las filas de la matriz A obteniendo de este modo una nueva matriz. En el caso de que A sea cuadrada e invertible gracias a estas transformaciones elementales podremos calcular la matriz inversa, diagonalizarla u obtener a partir de ella una matriz triangular superior o inferior. Las operaciones elementales que podemos hacer con las filas de una matriz son las siguientes:

1. Multiplicar una fila por un número diferente de cero.
2. Sumar un múltiplo de una fila con otra fila.
3. Permutar filas.

Definición 1 (Matriz Elemental) *Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ se llama elemental si se puede obtener a partir de la matriz elemental, I_n mediante una sola operación elemental.*

Ejemplos:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{5F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \rightleftarrows 3F_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Teorema 1 *Toda matriz elemental es invertible. La inversa de una matriz elemental es a su vez elemental.*

1.6. Determinantes

Definición 2 (Matriz adjunta asociada a un elemento) *Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ se denomina matriz adjunta del elemento que ocupa el lugar (i,j), es decir, que se encuentra en la fila i y columna j, a la matriz que se obtiene eliminando la fila i y la columna j de la matriz dada y se denota por A_{ij}.*

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -8 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \\ A_{21} &= \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \\ A_{31} &= \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definición 3 (Determinante de una matriz de orden 2) *Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definimos su determinante y lo denotaremos mediante $|A| = Det(A)$ como:*

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ |A| &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \end{aligned}$$

Definición 4 (Determinante de una matriz de orden 3) *Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

definimos su determinante mediante la fórmula:

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}|$$

Definición 5 (Determinante de una matriz de orden n) *Dada una matriz cuadrada* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

definimos su determinante mediante la fórmula:

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n}|A_{1n}|$$

Notar que el la definición que acabamos de dar, desarrollamos el determinante a través de los elementos de la primera fila y el determinante de sus matrices adjuntas, pero se puede desarrollar a través de los elementos de cualquier fila o columna y las matrices adjuntas respectivas.

1.6.1. Propiedades de los determinantes

1. Si una matriz tiene una fila de ceros, su determinante es nulo.

2.

$$\begin{aligned} |C| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+b_{j1} & a_{j2}+b_{j2} & \cdots & a_{jn}+b_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= |A| + |B| \end{aligned}$$

   para $j = 1, 2, ..., n$.

3. Si B es una matriz que se obtiene a partir de una matriz A multiplicando por un número real $\lambda \in \mathbb{R}$ una de sus filas o columnas se tiene que

$$|B| = \lambda |A|$$

4. Si B es una matriz que se obtiene intercambiando dos filas o columnas de una matriz A se tiene que
$$|B| = -|A|$$
5. Si una matriz tiene dos filas iguales su determinantes es nulo.
6. Si B es una matriz que se obtiene a partir de una matriz A sumando un múltiplo de una fila (o columna) a otra fila de A (o columna) se tiene
$$|B| = |A|$$
7. El determinante de una matriz triangular superior o inferior es el producto de los elementos de su diagonal.
8. Si una matriz tiene todos los elementos de una fila (o columna), supongamos por ejemplo la fila i, nulos excepto el que ocupa el lugar j, se tiene que
$$|A| = (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$
9. El determinante de toda matriz cuadrada coincide con el de su transpuesta
$$|A| = \left|A^t\right|$$
10. El determinante de un producto de matrices cuadradas del mismo orden es el producto de los determinantes
$$|AB| = |A|\,|B|$$

Con todas estas propiedades podemos ver que el cálculo de un determinante se simplifica si desarrollamos el determinante por una fila o columna que contenga el mayor número de ceros posible. Si una matriz no posee ningún elemento nulo es posible realizar operaciones elementales, de manera que el determinante no cambie, pero que la nueva matriz posea varios ceros en alguna de sus filas o columnas. Combinando operaciones elementales nos simplificará el cálculo del determinante de una matriz.

1.7. Matriz inversa de un matriz cuadrada

Definición 6 *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ cuadrada se dice* **inversible**, **regular** *o* **no singular**, *si existe una matriz $A^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ que verifica*
$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$
Si A no es inversible, se dice **singular** *o* **no regular**. *A la matriz A^{-1} se le llama* **matriz inversa** *de A.*

Teorema 2 *Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es inversible si y sólo si su determinante no es nulo*

$$|A| \neq 0$$

A continuación vamos a ver cómo calcular la matriz inversa a través de determinantes.

Definición 7 *El determinante $|A_{ij}|$, de la matriz adjunta A_{ij} asociada al elemento a_{ij} es conocido como el* **menor complementario** *del elemento a_{ij}, para cada i,j=1,2,...,n. El* **adjunto** *o* **cofactor** *del elemento a_{ij} para cada i,j=1,2,...,n se define como*

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$$

Definición 8 (Matriz Adjunta) *Definimos la matriz adjunta de una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ a aquella formada de sustituir cada elemento a_{ij} por su respectivo adjunto o cofactor*

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Cuando calculamos el producto $A \cdot (Adj(A))^t$ obtenemos

$$A\cdot = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A|\, I_n$$

Por tanto, definimos la matriz inversa como:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

es decir, la matriz adjunta transpuesta dividida por el determinante de la matriz A.

1.7.1. Propiedades de la matriz inversa

1. Si A y $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ son inversibles entonces

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

2. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es inversible

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$$

1.8. Rango de una matriz

Definición 9 *Definimos el rango de una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ como el orden de la mayor submatriz cuadrada de la matriz A con determinante no nulo. De forma equivalente se puede definir el rango como el mayor número de filas (o columnas) linealmente independientes de la matriz A.*

1.8.1. Propiedades del rango de una matriz

1. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ entonces $rang(A) \leq \min(n, m)$.
2. $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ tiene rango máximo si $rang(A) = \min(n, m)$.
3. $rang(A) = rang(A^t)$.
4. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y es invertible entonces $rang(A) = n$.
5. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ si intercambiamos dos filas (respectivamente dos columnas) de A, o multiplicamos una fila (respectivamente dos columnas) por un escalar no nulo, o, le sumamos una fila a una fila (respectivamente con columnas) multiplicada por un escalar, entonces el rango de la matriz resultante no varía.

EJERCICIOS

1. Hallar x, y, z y w si
$$3\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w-1 & 2w+3 \end{pmatrix}$$

2. Sean
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$
calcular AB y BA.

3. Probar que las matrices AA^t y A^tA están definidas para cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$

4. Encontrar AA^t y A^tA donde
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ calcular A^2 y A^3. Hallar $f(A)$ donde $f(x) = 2x^3 - 4x + 5I$.

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ encontrar un vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ no nulo tal que $A\vec{u} = 3\vec{u}$.

7. Encontrar todas las matrices $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ que conmutan con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Calcular los siguientes determinantes de orden 2:
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 1 \\ a & b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{vmatrix}$$

9. Hallar la inversa de las matrices anteriores, en el caso de que exista..

10. Calcular los siguientes determinantes:
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

11. Demostrar que si a, b y c son números reales, las raíces de la ecuación

$$\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = 0$$

son reales.

12. Calcular los siguientes determinantes mediante su desarrollo por la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

13. Calcular los siguientes determinantes reduciéndolos a una matriz triangular superior mediante operaciones elementales:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

14. Calcular los siguientes determinantes usando sus propiedades y efectuando un número reducido de computaciones

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

15. Hallar las inversas de las siguientes matrices, calculando primero la matriz de cofactores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

16. Calcular las inversas de las anteriores matrices a través de transformaciones elementales.

17. Hallar la inversa de las siguientes matrices de orden n :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 2^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+x \end{pmatrix}$$

18. Encontrar los valores de a para que las matrices siguientes sean inversibles:

$$\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & -1 \\ 0 & 1 & a-3 \end{pmatrix}$$

19. Comprobar, sin desarrollar, que el determinante de la matriz A es múltiplo de 9:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 5 & 12 & 4 \\ 3 & 18 & 9 \end{pmatrix}$$

20. Demostrar el siguiente determinante conocido como determinantes de Vandermonde:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

21. Calcular el rango de las siguientes matrices

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 5 & 8 & 16 \\ 4 & 2 & 6 & 12 \\ 5 & 6 & 12 & 23 \end{pmatrix}$

22. Consideremos que nos encontramos en una empresa de electrodomésticos que posee tres tiendas cada una de las cuales tiene las siguientes existencias:

Tienda 1: 10 TV, 15 DVD, 9 cadenas musicales (CM) y 8 conjuntos compactos de TV, DVD y CM

Tienda 2: 20 TV, 14 DVD, 8 CM y 5 conjuntos compactos de TV, DVD y CM

Tienda 3: 30 TV, 13 DVD, 7 CM y 2 conjuntos compactos de TV, DVD y CM

Si la tienda abastece a sus tiendas con los siguientes artículos:

Tienda 1: 1 TV, 3 DVD, 5 CM y 0 conjuntos compactos de TV, DVD y CM

Tienda 2: 4 TV, 9 DVD, 6 CM y 2 conjuntos compactos de TV, DVD y CM

Tienda 3: 7 TV, 15 DVD, 7 CM y 4 conjuntos compactos de TV, DVD y CM

a) Construye las matrices de existencias y abastecimiento. ¿Cuál es el nuevo nivel de existencias?

b) Se tiene un informe sobre las ventas en notación matricial:

$$V = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 12 & 9 & 6 \\ 8 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el nuevo nivel de existencias?

c) Si la empresa quiere aumentar un 50 % su inventario porque existen expectativas de aumentar las ventas. ¿Cuál debería ser el nuevo nivel de inventario en cada tienda?

d) Si el precio de venta de un televisor es de 500 Euros, un DVD es de 300 Euros, el de la cadena musical es de 250 Euros y el del equipo compacto es de 700 Euros. ¿Cuál es el valor de las existencias en cada tienda?

e) Si queremos sacar un total de P_1 Euros en la Tienda 1, P_2 Euros en la Tienda 2 y P_3 Euros en la Tienda 3. ¿Se podría saber qué precios se deberían fijar en cada artículo?

f) Supongamos que en lugar de 4 artículos en esta empresa sólo hubiese tres, TV, DVD y CM, y que el nivel de existencias de la empresa en el momento actual viene dado por la matriz

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} T1 & T2 & T3 \end{array} \\ \begin{array}{c} TV \\ DVD \\ CM \end{array} & \begin{pmatrix} 10 & 20 & 16 \\ 15 & 14 & 8 \\ 9 & 8 & 15 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calcular los precios que debemos poner a cada artículo para obtener 2.000 Euros en la tienda 1, 3.000 Euros en la tienda 2 y 2.500 Euros en la tienda 3.

Aplicaciones a la Criptografía:

El mundo de las telecomunicaciones y las nuevas tecnologías de la información se interesa cada vez más por la transmisión de mensajes encriptados que sean difíciles de desencriptar por otros, en caso de ser interceptados, pero que se decodifiquen con facilidad por quienes los reciben. Hay muchas formas interesantes de cifrar o encriptar mensajes, y en su mayor parte usan la teoría de números o el álgebra lineal. Describiremos aquí un método que es eficaz, en especial cuando se usa una matriz de gran tamaño. En los ejercicios trabajemos con matrices pequeñas para evitar grandes cálculos manuales.

Comenzaremos con una matriz M invertible, que sólo la conocen quienes la trasmiten y quienes la reciben. Por ejemplo,

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

supongamos que se desea encriptar el mensaje:

ATTACK NOW

Reemplazamos cada letra por el número que le corresponde a su posición en el alfabeto (A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z) y representamos un espacio por 0.

El mensaje anterior se ha convertido en la sucesión de números 1, 20, 20,1, 3, 11, 0, 14, 15, 23, que agrupamos en una sucesión de vectores columna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 \\ 23 \end{pmatrix}$$

y multiplicamos por M por la izquierda:

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 20 & 3 & 0 & 15 \\ 20 & 1 & 11 & 14 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77 & -56 & 35 & 56 & 47 \\ 39 & -18 & 19 & 28 & 31 \end{pmatrix}$$

Con lo que el mensaje cifrado que se enviará es 77, 39, -56, -18, 35, 19, 56, 28, 47, 31.

Para desencriptar el mensaje quien lo recibe debe calcular M^{-1},

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

y multiplicar por los números recibidos agrupados en una sucesión de vectores columna igual que antes, obtenemos el mensaje original.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 77 & -56 & 35 & 56 & 47 \\ 39 & -18 & 19 & 28 & 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 20 & 3 & 0 & 15 \\ 20 & 1 & 11 & 14 & 23 \end{pmatrix}$$

23. Para aquellos alumnos que estén cursando la asignatura de Álgebra, os voy a dar un breve pero importante consejo para poder aprobar la asignatura:

$$1, 9, 10, 22, 24, 43, 16, 37, 53, 24, 36, 56, 16, 28, 44, 37, 17, 34, 21, 18, 20, 25, 18, 31, 1, 20, 20$$

Para que este mensaje sea accesible a todos, solamente comentar que el mensaje ha sido encriptado basándose en el método anterior mediante la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

pero utilizando el alfabeto español (la misma asignación anterior, pero incluyendo nuestra querida Ñ). Ayuda a tus compañeros y desencriptar el mensaje.

24. Un alumno de la Universidad Europea de Madrid, que cursa la asignatura de Álgebra, ha conseguido interceptar un mensaje entre las profesoras de la asignatura sobre el examen parcial. El mensaje es

$$9, 7, 32, 28, 21, 19, 38, 38, 86, 58, 32, 32, 82, 50, 38, 38, 56, 24, 40, 40, 95, 57, 79, 53$$

Sabe que el mensaje ha sido encriptado con una matriz cuadrada 2×2, y sospecha que al final del mensaje aparece la firma de una de las profesoras: RRSM. Ayuda a tus compañeros y desencripta el mensaje.

Capítulo 2

Sistemas de Ecuaciones Lineales

2.1. Definiciones

- Llamaremos sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas a un sistema de ecuaciones de la forma

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

que escrito de forma matricial, equivale a

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

o abreviadamente

$$AX = B$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{matriz de coeficientes}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{vector de incógnitas}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{vector de términos independientes}$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + 4x_2 + x_3 - 9x_4 & = & 0 \\ -5x_1 - 3x_2 + x_4 & = & 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 5x_4 & = & 3 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -9 \\ 3 & 8 & 4 & 5 \\ -5 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La resolución de un sistema consiste en averiguar si, dadas las matrices A y B, existe un vector solución tal que $AX = B$ y, en caso afirmativo, si este vector es único. Por tanto, podemos clasificar los sistemas lineales según el siguiente criterio:

- **Sistema incompatible**, si carece de solución.
- **Sistema compatible determinado**, si existe solución y esta es única.
- **Sistema compatible indeterminado**, si existe más de una solución.

2.2. Propiedades de la equivalencia de sistemas de ecuaciones lineales

Dos sistemas se dicen equivalentes si sus conjuntos de soluciones coinciden. En relación con esta definición se pueden demostrar las siguientes propiedades de los sistemas lineales:

1. Si multiplicamos cualquiera de las ecuaciones de un sistema lineal por un escalar, obtenemos otro sistema equivalente.

2. Si se intercambia la posición de dos ecuaciones, el sistema resultante es equivalente.

3. Si a una ecuación se le suma otra multiplicada por un número real cualquiera, el sistema resultante es equivalente.

4. Si observamos que una ecuación es combinación lineal de cierto número de ecuaciones del sistema, al suprimir esa ecuación obtendremos un sistema equivalente.

2.3. Resolución de sistemas lineales

A continuación nos centraremos en cómo se simplifica y resuelve un sistema lineal de la forma $AX = B$. En primer lugar nos ocuparemos del problema de la existencia o no de solución del sistema. Llamaremos matriz ampliada del sistema a la matriz

$$M = (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Teorema 3 (de Rouché-Fröbenius)

1. *Un sistema es* **compatible determinado** *si y sólo si* $rango(A) = rango\,(B) = n$

2. *Un sistema es* **compatible indeterminado** *si y sólo si* $rango(A) = rango\,(B) < n$

3. *Un sistema es* **incompatible indeterminado** *si y sólo si* $rango(A) < rango\,(B)$

2.3.1. Método de resolución de Gauss

Basándose en las propiedades de equivalencia para los sistemas de ecuaciones lineales anteriores, Gauss encontró un método, no sólo para resolver estos sistemas, sino también para, al mismo tiempo, conocer si es compatible determinado, indeterminado, o incompatible, el cual consiste, sencillamente, en buscar una secuencia de operaciones elementales a través de las filas que reduzcan la matriz ampliada $M = (A \mid B)$ a una forma triangular, o en el mejor caso diagonal.

Supongamos un sistema de tres ecuaciones, como hemos mencionado a través de ecuaciones elementales podemos transformar la matriz $M = (A \mid B)$ en una matriz triangular donde nos podemos encontrar los tres casos siguientes:

	Matriz escalonada de la matriz de coeficientes	Matriz escalonada de la matriz ampliada	
Ejemplo A	$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & 1 & a'_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & b'_1 \\ 0 & 0 & 1 & b'_2 \end{pmatrix}$	Sistema compatible determinado
Ejemplo B	$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ 0 & 1 & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & 1 & a'_{24} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & a'_{24} & b'_1 \\ 0 & 0 & 1 & a'_{24} & b'_2 \end{pmatrix}$	Sistema compatible indeterminado
Ejemplo C	$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ 0 & 1 & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & a'_{24} & b'_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b'_2 \end{pmatrix}$	Sistema incompatible

2.3.2. Regla de Cramer

Cuando tenemos un sistema de ecuaciones en el cual el número de incógnitas es igual al número de ecuaciones entonces, el sistema será compatible determinado si y sólo si el determinante de la matriz del sistema es no nulo

$$|A| \neq 0$$

en ese caso, podremos calcular la matriz inversa de A, por tanto la solución del sistema $AX = B$ es:

$$X = A^{-1}B$$

Otro método de obtener las soluciones del sistema es a través de la regla de Cramer que se basa en la propiedad de los determinantes.

Veamos el caso particular de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = e_1 \\ cx + dy = e_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & b & e_1 \\ c & d & e_2 \end{array}\right)$$

Resolviendo por el método de Gauss llegamos a la siguiente matriz triangular:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & e_1 \\ 0 & ad - bc & ae_2 - ce_1 \end{array}\right)$$

De modo que, después de un pequeño cálculo, llegamos a:

$$y = \frac{ae_2 - ce_1}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} a & e_1 \\ c & e_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{de_1 - be_2}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} e_1 & b \\ e_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

De igual modo, se puede obtener la solución para un sistema de n ecuaciones con n incógnitas. Así, generalizando, si definimos

$$B_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, ..., n$$

la matriz resultante de cambiar en la matriz del sistema la columna i-ésima por la columna de términos independientes, entonces

$$x_i = \frac{|B_i|}{|A|}, \quad i = 1, 2, ..., n$$

Si $|A| = 0$ entonces el sistema será incompatible o compatible indeterminado dependiendo del rango de la matriz ampliada.

2.4. Sistemas lineales homogéneos.

Un sistema lineal homogéneo es de la forma

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (2.1)$$

Sabemos que todo sistema homogéneo posee la solución trivial $X = (0, 0, 0, ..., 0)$, y por tanto es compatible. Pero probaremos a continuación que si es indeterminado ha de tener infinitas soluciones.

Proposición 1 *:*

1. *Si X es una solución del sistema homogéneo (H) y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces λX es también solución del sistema (H).*

2. *Si X e Y son soluciones del sistema homogéneo (H), entonces $X+Y$ es solución de (H)*

2.5. Factorización LU

Toda matriz cuadrada se puede descomponer como un producto de matrices elementales, pero además toda matriz elemental E tiene una inversa que es también una matriz elemental, que se obtiene de invertir la operación elemental de la fila que produjo E a partir de la matriz elemental.

Veámos esto más claramente con un ejemplo.

Consideremos la siguiente matriz invertible

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - F_1]{F_2 = F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 = \frac{1}{5}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 = F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = -\frac{1}{4}F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 = F_1 - 3F_3]{F_2 = F_2 - 2F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 = F_1 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces las siguientes matrices elementales:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow E_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_6 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_6^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde $E_6 \cdot E_5 \cdot E_4 \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot E_4^{-1} \cdot E_5^{-1} \cdot E_6^{-1} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación nos gustaría saber cómo factorizar una matriz como producto de una matriz triangular inferior L y una matriz triangular superior U, de manera que $A = LU$. Nos damos cuenta que a través del ejemplo anterior vemos que las 3 primeras transformaciones elementales nos llevan la matriz A a una matriz triangular superior que denotaremos por U, es decir:

$$E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = U$$

Por tanto, tenemos que $E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = U$. Despejando A obtenemos $A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot U$, con $L = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1}$.

$$E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = L$$

De este modo acabamos de descomponer la matriz A como el producto de dos matrices, una matriz triangular inferior L y otra matriz triangular superior U.

$$A = L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación vamos a utilizar esta factorización para resolver sistemas lineales. Supongamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Descomponiendo A como LU tenemos que:

$$LU\vec{x} = \vec{b}$$

Haciendo el cambio $\vec{y} = U\vec{x}$ obtenemos:

$$L\vec{y} = \vec{b}$$

Supongamos que tenemos que resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{array}\right\}$$

en forma matricial tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pero sabemos que $A = LU$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tomamos

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

de modo que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que equivale a resolver el siguiente sistema triangular inferior:

$$\left.\begin{array}{r} y_1 = 2 \\ -2y_1 + 5y_2 = -3 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \end{array}\right\}$$

que se resuelve fácilmente por eliminación directa:

$$y_1 = 2,\ y_2 = \frac{1}{5},\ y_3 = -\frac{6}{5}$$

A continuación resolvemos el sistema triangular superior:

$$\vec{y} = U\vec{x} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

equivalente a

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 + 5x_3 = \frac{1}{5} \\ -4x_3 = -\frac{6}{5} \end{array}\right\}$$

cuya solución es

$$x_3 = \frac{3}{10},\ x_2 = -\frac{2}{5},\ x_1 = \frac{19}{10}$$

Este resultado puede generalizarse a cualquier matriz

Teorema 4 *Sea A una matriz $m \times n$ que puede reducirse a una matriz triángular superior U a través de operaciones elementales, entonces A tiene una factorización LU, donde L es una matriz triangular inferior $m \times m$ y U es una matriz $m \times n$.*

EJERCICIOS

1. Resolver los sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de eliminación de Gauss

(a) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=1 \\ x+y-2z=2 \end{array}\right\}$ (b) $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=6 \\ 2x+y-3z=-3 \\ x-3y+3y=10 \end{array}\right\}$

(c) $\left.\begin{array}{r} 3x+y-z+2t-7=0 \\ 2x-2y+5z-7t-1=0 \\ -4x-4y+7z-11t+13=0 \end{array}\right\}$ (d) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ 2x-y+3z=4 \\ 3x+y-z=3 \\ 2x-2z=0 \end{array}\right\}$

2. Resolver los siguientes sistemas, siempre que sea posible, por inversión de la matriz del sistema y por la regla de Cramer:

(a) $\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ 2x+y=4 \end{array}\right\}$ (b) $\left.\begin{array}{r} 2x+3y+z=35 \\ x+2y+5z=45 \\ 3x+2y+z=40 \end{array}\right\}$ (c) $\left.\begin{array}{r} x+2y+z=4 \\ x+3y+z=5 \\ 2x+y+z=4 \end{array}\right\}$

3. Estudiar la compatibilidad de los sistemas siguientes que a continuación se describen en función de los valores que pueden tomar los parámetros que en ellos aparecen. Resolver aquéllos que sean compatibles.

(a) $\left.\begin{array}{r} x+2y-3z=0 \\ 2x+5y-6z=1 \\ x-1-3z=-3 \end{array}\right\}$ (b) $\left.\begin{array}{r} a^2x+y+z=3 \\ x+a^2y+z=4-a \\ x+y+a^2z=2+a^2 \end{array}\right\}$

(c) $\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=1 \\ x+ay+z+t=1 \\ x+y+a^2z+t=1 \\ x+y+z+a^3t=1 \end{array}\right\}$ (d) $\left.\begin{array}{r} x+by+az=1 \\ ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \end{array}\right\}$

4. Demostrar que si el sistema

$$\left.\begin{array}{r} -x+by+cz+dt=0 \\ ax-y+cz+dt=0 \\ ax+by-z+dt=0 \\ ax+by+cz-t=0 \end{array}\right\}$$

con a, b, c, d todos distintos de -1, tiene solución distinta de la trivial, entonces se verifica la relación:

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d}=1$$

5. Obtener una factorización LU de la matriz:

(a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 \\ -12 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & 5 & -2 \\ 20 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -12 & -1 & -4 & -4 & -1 \\ 4 & -3 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -12 & -1 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \\ 20 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

6. Resolver el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ empleando una factorización $A = LU$

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$

PROBLEMAS

- **Sobre fábricas de ordenadores y cambios de moneda extranjera**

1. Una empresa fabrica tres tipos de ordenadores: JP1, JP2 y JP3. Para armar un JP2 se necesitan 10 horas, otras 2 para probar sus componentes y 2 horas más para instalar el software. El tiempo requerido por el JP3 es de 12 horas para su ensamblado, 2'5 horas para probarlo y 2 horas para instalar software. El JP1, el más sencillo de la línea, necesita 6 horas de ensamblado, 1'5 horas de prueba y 1'5 horas de instalación de software. Si la fabrica de esta empresa dispone de 1560 horas de trabajo por mes para armar, 340 horas para probar y 320 horas para instalar. ¿Cuántos ordenadores de cada tipo puede producir en un mes?

2. Un empresario estadounidense necesita, en promedio, cantidades fijas de yenes japoneses, libras inglesas y marcos alemanes durante cada viaje de negocios. Este año viajó 3 veces. La primera vez cambio un total de \$2.550 con las siguientes tasas: 100 yenes por dólar, 0'6 libras por dólar y 1'6 marcos por dólar. La segunda vez cambió \$2.840 en total con tasas de 125 yenes, 0'5 libras y 1'2 marcos por dólar. La tercera vez cambió un total de \$2.800 a 100 yenes, 0'6 libras y 1'2 marcos por dólar. ¿Cuál es la cantidad fija de yenes, marcos y libras que cambia en los viajes?

- **Sobre experimentos**

3. En un laboratorio se realizan tres experimentos, en cada uno de los cuales se utilizan tres sustancias químicas: A, B y C. En el primer experimento se debe utilizar de la sustancia B el doble que de la sustancia A, y de la sustancia C el triple que de la A. En el segundo experimento se utilizan las mismas cantidades de sustancia B que de C, pero de sustancia A se utiliza el doble que de las anteriores. En el tercer experimento se utiliza la misma cantidad de todas las sustancias. Si se dispone de 8 gramos de sustancia A, de 7 gramos de sustancia B y de 8 gramos de sustancia C, ¿cúanto se debe utilizar de cada sustancia en cada experimento para que al final no sobre ni falte de ninguna de ellas?

4. Tres alimentos I, II y III contienen las cantidades de vitaminas A, B y C (en mg por Kg de alimento) recogidas en la siguiente tabla:

	I	II	III
A	5	10	7
B	12	5	4
C	8	6	15

   Supongamos que una persona necesita un aporte diario de vitaminas A, B y C de 14 mg, 17 mg y 20 mg, respectivamente. Plantear y resolver el sistema de ecuaciones lineales que necesitamos para determinar las cantidades diarias mínimas de alimentos I, II y III que debe ingerir una persona.

- **Sobre números y edades**

5. Calcula las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán entonces, y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

6. Sean x, y, z tres números enteros tales que $x + y + z$, $x + y + 2z$, $3x + 4y - 2z$ son múltiplos de 5. Demuestra que x, y, z son múltiplos de 5.

7. Un número N de tres dígitos es igual a 28 veces la suma de sus dígitos. Si restamos este número al número obtenido escribiendo los dígitos en orden inverso obtenemos 198. Además sabemos que el dígito de las unidades es igual a la suma de los otros dos. ¿Qué número es N?

- **Un poco de historia**

8. En el tratado de matemática más importante de China, el que ejerció mayor influencia, titulado “Los Nueve Capítulos”, o “El arte matemático en nueve secciones” (Zhui Zhang Suan Shu, s. III a.C.), en su sección octava (Faang-Chêng, que significa ecuación) se relacionan ecuaciones lineales simultáneas a partir del siguiente problema:

   Hay tres tipos de cereal, de los cuales tres fardos del primero, dos del segundo, y uno del tercero hacen 39 medidas. Dos del primero, tres del segundo y uno del tercero hacen 34 medidas. Y uno del primero, dos del segundo y tres del tercero hacen 26 medidas. ¿Cuántas medidas de cereal son contenidas en un fardo de cada tipo?

   La estrategia de resolución que propone el autor es la siguiente:

   1^o Se crea la tabla siguiente:

$$\begin{array}{lll} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array} \quad \left(\text{En nuestra notación: } \left\{ \begin{array}{l} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{array} \right. \right)$$

   2^o A continuación da instrucciones para reducir la tabla a esta forma:

$$\begin{array}{lll} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{array} \quad \left(\text{En nuestra notación: } \left\{ \begin{array}{l} 36z=99 \\ 5y+z=24 \\ 3x+2y+z=39 \end{array} \right. \right)$$

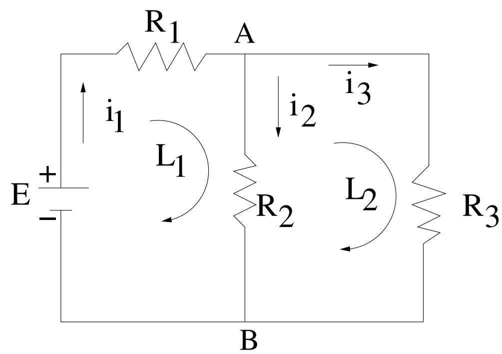
   Y de ahí obtienen los valores para x, y, z. ¿Te suena de algo este método?

- ### Sobre circuitos eléctricos

La intensidad de las corrientes y las caídas de voltaje en un circuito eléctrico se rigen por las Leyes de Kirchhoff.
LEY DE KIRCHHOFF DE LA CORRIENTE: La suma algebráica de todas las corrientes en cualquier nodo es cero.
LEY DE KIRCHHOFF DEL VOLTAJE: La suma algebráica de todos los cambios de potencial en cualquier bucle es cero.

Una aplicación frecuente de estas leyes es cuando se conoce el voltaje de la fuerza electromotriz E (que por lo general es una batería o generador) y los ohmios R_j de las resistencias, y se pide calcular la intensidad i_j de las corrientes, que circulan por cada segmento del circuito.
Obsérvese que para cada elemento en el circuito hay que elegir una dirección positiva para medir la corriente que pasará a través de dicho elemento. Las elecciones se indican con flechas. Para la fuente de voltaje E se toma como positivo el sentido del polo negativo

al positivo. Dicha elección condicionará también el signo de los cambios de potencial en las resistencias. El cambio de potencial a través de las resistencias será negativo cuando dicho cambio se mida en el mismo sentido que la corriente, y positivo en el caso contrario.



Ejemplo:

En los nodos A y B tenemos:

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

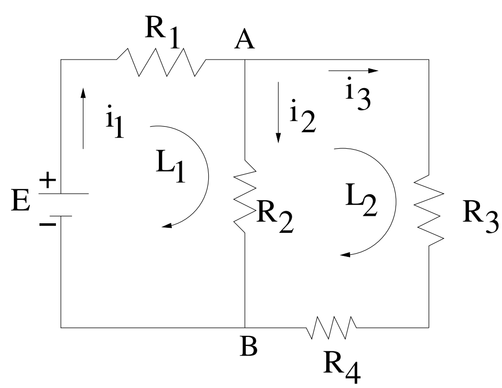
En el bucle L_1 tenemos:

$$E - R_1 i_1 - R_2 i_2 = 0$$

En el bucle L_2:

$$R_2 i_2 - R_3 i_3 = 0$$

9. Calcular las corrientes i_1, i_2, i_3 en el circuito eléctrico de la figura de abajo si el voltaje de la batería es $E = 6\ V$ y las resistencias son $R_1 = 2\Omega, R_2 = 3\Omega, R_3 = 4\Omega, R_4 = 2\Omega$.



Capítulo 3

Espacios Vectoriales

3.1. Espacios vectoriales

3.1.1. Definiciones

Definición 10 (*Espacio Vectorial*) *Un conjunto V, cuyos elementos se denotan mediante $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots$, se dice que es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ (si $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ se dice que es un* espacio vectorial real *y si $\mathbb{K}$ es $\mathbb{C}$ se dice que es un* espacio vectorial complejo*), si en él se han definido dos operaciones:*

- suma*, $+$, de manera que a cada par de elementos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de V se le hace corresponder el elemento $\vec{u} + \vec{v}$ de V, denominado suma de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y*
- producto por un escalar*, de manera que a todo elemento $\vec{u}$ de V y a todo elemento α de $\mathbb{K}$ se le hace corresponder el elemento $\alpha\vec{u}$ de V,*

que satisfacen las siguientes propiedades:

$(S1)$ (Conmutativa) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ para todo $\vec{u}$, $\vec{v}$ de V .

$(S2)$ (Asociativa) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ para todo $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de V.

$(S3)$ (Elemento neutro) Existe un elemento de V, designado por $\vec{0}$ y denominado *neutro*, tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ para todo $\vec{u}$ de V.

$(S4)$ (Elemento opuesto) Para todo $\vec{u}$ de V existe un elemento, designado por $-\vec{u}$ y denominado opuesto de $\vec{u}$, tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

$(M1)$ $1\vec{u} = \vec{u}$ para todo $\vec{u}$ de V, donde 1 denota el elemento unidad de $\mathbb{K}$.

$(M2)$ $\alpha\,(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\,\vec{u}$ para todo $\vec{u}$ de V y todo α, β de $\mathbb{K}$.

$(M3)$ $(\alpha+\beta)\,\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$ para todo $\vec{u}$ de V y todo α, β de $\mathbb{K}$.

$(M4)$ $\alpha\,(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ para todo $\vec{u}$, $\vec{v}$ de V y todo α de $\mathbb{K}$

Cuando un conjunto V, con la operación suma $(V, +)$ satisface las propiedades $(S1)$, $(S2)$, $(S3)$ y $(S4)$ se dice que es un *grupo abeliano o conmutativo.*

Definición 11 (*Dependencia e Independencia lineal)* *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$; un número finito de vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, ..., $\vec{u}_n$ se dicen que son* **linealmente dependientes** *si existe n elementos de $\mathbb{K}$, α_1, α_2, α_3, ..., α_n no todos nulos, tal que:*

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \alpha_3\vec{u}_3 + ... + \alpha_n\vec{u}_n = \vec{0} \tag{3.1}$$

Si los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, ..., $\vec{u}_n$ no son linealmente dependientes, se dice que son **linealmente independientes** *(LI); por tanto, los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, ..., $\vec{u}_n$ son LI si cualquier igualdad como la que aparece en (3.1) implica que todos los elementos de $\mathbb{K}$, α_1, α_2, α_3, ..., α_n, son todos nulos.*

Definición 12 (*Combinación lineal*) *Diremos que $\vec{v}$ es combinación lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, ..., $\vec{u}_n$ si existen α_1, α_2, α_3, ..., α_n, elementos de $\mathbb{K}$ no todos nulos, tales que:*

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \alpha_3\vec{u}_3 + ... + \alpha_n\vec{u}_n$$

3.1.2. Sistemas de generadores y bases

Definición 13 (*Sistema de generadores)* *Un conjunto finito de vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, ..., \vec{u}_k\}$ de un espacio vectorial V se dice que es un* **sistema de generadores** *de V si todo elemento de V se puede escribir como una combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, ..., \vec{u}_k$.*

Proposición 2 *Todo conjunto finito de vectores linealmente independientes no puede contener un subconjunto de vectores que sean linealmente independientes.*

Definición 14 (*Base de un espacio vectorial)* *Un conjunto finito de vectores $\{\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, ..., $\vec{u}_k\}$ se dice que es una base de un espacio vectorial V si se cumplen las dos siguientes condiciones:*

1. *Los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, ..., \vec{u}_k$ son linealmente independientes.*

2. *Todo elemento de V es una combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, ..., \vec{u}_k$.*

Observar que cualquier base de V es un sistema de generadores de V.

Proposición 3 *Si V es un espacio vectorial que posee una base con n elementos, entonces $n+1$ vectores de V son siempre linealmente dependientes. De manera más general, en un espacio vectorial V que posea una base con n elementos, entonces cualquier conjunto de m vectores de V, con $m > n$, son linelamente dependientes.*

Proposición 4 *Todas las bases de un mismo espacio vectorial V poseen el mismo número de elementos.*

Definición 15 (*Dimensión de un espacio vectorial*) *El número de elementos que posee una base cualquiera de un espacio vectorial V recibe el nombre de* dimensión *de V*, $\dim(V)$.

Dado un vector $\vec{v}$ de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ y dada una base $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, ..., \vec{u}_n\}$ de dicho espacio vectorial, sabemos que $\vec{v} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + ... + \alpha_n\vec{u}_n$, con $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$.

Dichos números $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ se denominan **componentes** o **coordenadas** de $\vec{v}$ en la base $\mathcal{B}$. Las componentes de un vector respecto de una base son únicas.

La **base canónica** de un espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ viene dada por $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, ..., 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $\vec{e}_n = (0, 0, 0, ..., 1)$. De forma similar se puede definir la base canónica de cualquier espacio vectorial.

3.2. Cambio de base

Supongamos que tenemos dos bases de un espacio vectorial V

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}_C & = & \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\} \text{ (base canónica)} \\ \mathcal{B}_1 & = & \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\} \end{array}$$

Dado cualquier vector $\vec{w} \in V$ lo podemos expresar como una combinación lineal de cada una de las bases:

$$x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n = \vec{w} = x'_1\vec{u}_1 + x'_2\vec{u}_2 + ... + x'_n\vec{u}_n \tag{1}$$

donde $(x_1, x_2, ..., x_n)$ son las coordenadas de $\vec{w}$ en la base $\mathcal{B}_C$ y $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ son las coordenadas de $\vec{w}$ en la base $\mathcal{B}_1$.

Sabemos además que los vectores de la base $\mathcal{B}_1$ se pueden expresar como combinación lineal de los vectores de la base $\mathcal{B}_C$:

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= u_{11}\vec{e}_1 + u_{12}\vec{e}_2 + ... + u_{1n}\vec{e}_n \\
\vec{u}_2 &= u_{21}\vec{e}_1 + u_{22}\vec{e}_2 + ... + u_{2n}\vec{e}_n \\
&\vdots \\
\vec{u}_n &= u_{n1}\vec{e}_1 + u_{n2}\vec{e}_2 + ... + u_{nn}\vec{e}_n
\end{aligned}$$

donde los correspondientes $\{u_{ij}\}$, con $j = 1, ..., n$, son las coordenadas del vector $\vec{u}_i$ en la base $\mathcal{B}_C$.

Esto último se puede expresar en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vdots \\ \vec{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & ... & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & ... & u_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & ... & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

donde

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & ... & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & ... & u_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & ... & u_{nn} \end{pmatrix}$$

por tanto, con (2) y usando las propiedades de las matrices transpuestas, tenemos que

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vdots \\ \vec{u}_n \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix} \Rightarrow (\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)\, U^t \tag{3}$$

La expresión (1) puede escribirse matricialmente como:

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{w} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

pero a través de (3) tenemos que

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)\, U^t \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

luego tenemos entonces que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = U^t \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

es decir, U^t es la matriz que nos permite pasar coordenadas de la base $\mathcal{B}_1$ a coordenadas de la base canónica $\mathcal{B}_C$, por lo que la denominaremos $U^t = M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1}$ y escribiremos

$$C_{\mathcal{B}_C}[\vec{w}] = M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1} \cdot C_{\mathcal{B}_1}[\vec{w}] \tag{4}$$

donde $C_{\mathcal{B}_C}[\vec{w}] = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $C_{\mathcal{B}_1}[\vec{w}] = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ son las coordenadas del vector $\vec{w}$ en las bases $\mathcal{B}_C$ y $\mathcal{B}_1$, respectivamente, escritas como matrices columna.

Es decir, $M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1}$ nos permite pasar de la base $\mathcal{B}_1$ a la base canónica $\mathcal{B}_C$. Se puede observar que dicha matriz tiene como columnas las coordenadas de los vectores de la base $\mathcal{B}_1$ en la base canónica.

De igual modo, la inversa de la matriz $M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1}$ nos permitirá pasar de la base $\mathcal{B}_C$ a la base $\mathcal{B}_1$, de modo que tendremos $\left(M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1}\right)^{-1} = M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_C}$ y, multiplicando la expresión (4) por la izquierda por $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_C}$ podremos escribir

$$C_{\mathcal{B}_1}[\vec{w}] = M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_C} \cdot C_{\mathcal{B}_C}[\vec{w}] \tag{5}$$

Supongamos ahora que tenemos dos bases ninguna de las cuales es la canónica.

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\} \\ \mathcal{B}_2 &= \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\} \end{aligned}$$

igual que anteriormente tenemos ahora la matriz $M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_2}$ que nos permite pasar de $\mathcal{B}_2$ a la canónica $\mathcal{B}_C$ y $M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_C} = (M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_2})^{-1}$ que nos permite pasar de la canónica a la base $\mathcal{B}_2$.

Supongamos que las coordenadas de un vector $\vec{w}$ en la base $\mathcal{B}_1$ son $(x_1, x_2, ..., x_n)$ y queremos saber cuáles son sus coordenadas en la base $\mathcal{B}_2$, $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$. Por lo que hemos visto anteriormente tenemos que para pasar de la base $\mathcal{B}_1$ a la canónica hay que multiplicar por $M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1}$, de este modo tenemos que

$$M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

son las coordenadas de $\vec{w}$ en la base canónica. Ahora para pasar de la canónica a $\mathcal{B}_2$ tenemos que multiplicar por $M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_C}$, de este modo tenemos que

$$M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_C} M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Acabamos de probar de este modo que la matriz que permite pasar de coordenadas de $\mathcal{B}_1$ a coordenadas de $\mathcal{B}_2$ es $M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_C} M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1} = M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$.

Si queremos pasar de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$ es simplemente multiplicar por la inversa:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_C} M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_2}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

3.3. Subespacios vectoriales

3.3.1. Definiciones

Definición 16 (*Subespacio vectorial*) *Un subespacio vectorial de un espacio vectorial V es un subconjunto S de V, que a su vez es un espacio vectorial con las operaciones definidas en V.*

Para demostrar que un subconjunto es un subespacio vectorial no es necesario comprobar de nuevo que satisface todas las propiedades de espacio vectorial. En realidad, es suficiente demostrar las dos condiciones siguientes:

1. Para todo $\vec{u}, \vec{v} \in S$ se cumple que $\vec{u} + \vec{v} \in S$.

2. Para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y para todo $\vec{u} \in S$ se cumple que $\alpha\vec{u} \in S$.

Estas dos últimas condiciones son equivalentes a demostrar que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y para todo $\vec{u}$ y $\vec{v} \in S$

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in S.$$

Definición 17 (*Variedad lineal)* *Sea $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, ..., \vec{u}_k\}$ un subconjunto del espacio vectorial V, el subespacio engendrado por S es el conjunto de todas las combinaciones lineales formadas con los vectores de S. A este subespacio se le denomina variedad lineal engendrada por S y se denota por $\langle S \rangle = L(S)$ y los vectores de S constituyen un sistema de generadores de $L(S)$.*

3.3.2. Suma e intersección de subespacios vectoriales

Definición 18 (*Suma e intersección de subespacios vectoriales)* *Dados dos subespacios vectoriales S_1 y S_2 de un espacio vectorial V podemos definir su* **intersección**

$$S_1 \cap S_2 = \{\vec{u} \text{ tal que } \vec{u} \in S_1 \text{ y } \vec{u} \in S_2\}$$

y su **suma**

$$S_1 + S_2 = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \text{ tal que } \vec{u}_1 \in S_1 \text{ y } \vec{u}_2 \in S_2\}$$

estos dos nuevos subconjuntos de V son de nuevo subespacios vectoriales de V.

Proposición 5 *Dados dos subespacios vectoriales S_1 y S_2 de un espacio vectorial V se cumple que:*

$$\dim(S_1) + \dim(S_2) = \dim(S_1 + S_2) + \dim(S_1 \cap S_2)$$

Definición 19 (*Suma directa)* *Un espacio vectorial V es una suma directa de dos subespacios S_1 y S_2 si se cumple las dos siguientes condiciones:*

1. $S_1 + S_2 = V$
2. $S_1 \cap S_2 = \left\{\vec{0}\right\}$

Si esto se cumple se utiliza la notación $V = S_1 \oplus S_2$.

Si S_1 y S_2 son subespacios vectoriales de un espacio vectorial V, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $V = S_1 \oplus S_2$
2. Para todo $\vec{u} \in V$ existe una descomposición única de la forma $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ con $\vec{u}_1 \in S_1$ y $\vec{u}_2 \in S_2$.

EJERCICIOS

▪ Espacios vectoriales

1. Dados los vectores $a = (1,1), b = (2,1)$ y $c = (1,2)$ de $\mathbb{R}^2$

   a) Comprobar que forman un sistema de generadores.

   b) Comprobar que son linealmente dependientes.

2. En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$ se consideran las matrices:
   $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   Prueba que son linealmente independientes.

3. Probar que el conjunto $\mathcal{B} = \{(2,3),(0,2)\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y hallar las coordenadas del vector $(5,-1)$ respecto de la base $\mathcal{B}$.

4. Sabiendo que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, y $\vec{w}$ son linealmente independientes, probar que los vectores $\vec{u}, \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ también lo son.

5. Demostrar que el conjunto de polinomios $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ es una base de $P_3[x]$, conjunto de polinomios de grado menor o igual a 3. Probar que $\mathcal{B}' = \left\{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\right\}$ también es una base de $P_3[x]$.

6. Expresar el polinomio $2x^3 - 3x^2 + 5x - 6 \in P_3[x]$ como combinación lineal de los elementos de la base de $P_3[x]$ dada por $\{1, 1-x, x+x^2, x^2+x^3\}$.

▪ Cambios de base

7. Demostrar que los siguientes conjuntos son base de $\mathbb{R}^4$:

   $$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \{\vec{v}_1 = (1,1,0,0), \vec{v}_2 = (0,1,0,0), \vec{v}_3 = (0,0,1,1), \vec{v}_4 = (0,0,1,1)\} \\ \mathcal{B}_2 &= \{\vec{u}_1 = (1,2,0,0), \vec{u}_2 = (0,1,2,-1), \vec{u}_2 = (1,-1,-1,-1), \vec{u}_4 = (0,1,1,0)\} \end{aligned}$$

   Encontrar las componentes del vector $\vec{v} = 3\vec{v}_1 - \vec{v}_3 + 2\vec{v}_2$ respecto a la base $\mathcal{B}_2$ y respecto de la base canónica.

8. Demuestra que el conjuntos de polinomios $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ es una base de $P_3[x]$, conjunto de polinomios de grado menor o igual que 3. Prueba que $\mathcal{B}' = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$ también es una base de $P_3[x]$, y halla la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$. Expresa $2x^3 - 3x^2 + 5x - 6$ respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.

9. Para cada uno de los siguientes pares de bases de $\mathbb{R}^3$, calcula la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$:

   a) $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (-1,1,1), (0,1,2)\}$, $\mathcal{B}' = \{(2,1,1), (0,0,1), (-1,1,1)\}$

   b) $\mathcal{B} = \{(3,2,1), (0,-2,5), (1,1,2)\}$, $\mathcal{B}' = \{(1,1,0), (-1,2,4), (2,-1,1)\}$

10. Sea $\mathcal{B}_C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y consideremos los vectores $\vec{u}_1 = \vec{e}_2 - \vec{e}_1$, $\vec{u}_2 = \vec{e}_3 - \vec{e}_2, ..., \vec{u}_{n-1} = \vec{e}_n - \vec{e}_{n-1}, \vec{u}_n = -\vec{e}_n$.

    a) Demostrar que $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

    b) Expresar el vector $\vec{x} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + ... + \vec{e}_n$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$.

11. Calcular las coordenadas del vector $p(x) = -1 + 6x - 8x^2$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{1 + 2x + 2x^2, 2x - x^2, -1 - 2x\}$

12. Calcular la matriz del cambio de base M que pasa de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ a la base $\mathcal{B}$ que surge de girar 90^o alrededor del eje z y en sentido contrario a las agujas del reloj los vectores de la base canócica. Determinar las coordenadas del vector $\vec{v} = (1,1,1)$ respecto de la nueva base.

13. Considérense las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 &= \{\vec{u}_1 = (1,-2), \vec{u}_2 = (3,-4)\}\\ \mathcal{B}_2 &= \{\vec{v}_1 = (1,3), \vec{v}_2 = (3,8)\}\end{aligned}$$

    a) Encontrar las coordenadas de un vector arbitrario $\vec{v} = (a,b)$ relativas a la base $\mathcal{B}_1$.

    b) Encontrar las coordenadas de un vector arbitrario $\vec{v} = (a,b)$ relativas a la base $\mathcal{B}_2$.

    c) Determinar la matriz de cambio de base $M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$ desde $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$

    d) Determinar la matriz de cambio de base $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ desde $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$

14. Supóngase que los ejes x e y en el plano $\mathbb{R}^2$ se giran 45^o en el sentido contrario de las agujas del reloj, de forma que el nuevo eje x' esté a lo largo de la recta $x = y$ y el nuevo eje y' a lo largo de la recta $x = -y$. Encontrar:

    a) La matriz de cambio de base.

    b) Las nuevas coordenadas del punto $A(5,6)$ bajo la rotación dada.

15. Considérense las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 &= \{\vec{u}_1 = (1,-2,0), \vec{u}_2 = (3,-4,0), \vec{u}_3 = (0,0,1)\} \\ \mathcal{B}_2 &= \{\vec{v}_1 = (1,3,0), \vec{v}_2 = (3,8,0), \vec{v}_3 = (0,1,1)\} \\ \mathcal{B}_3 &= \{\vec{w}_1 = (1,0,0), \vec{w}_2 = (1,1,0), \vec{w}_3 = (1,1,1)\}\end{aligned}$$

   a) Determinar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.
   b) Determinar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_3$.
   c) Determinar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_3$.
   d) Calcular las coordenadas de vector $\vec{x} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ en la base $\mathcal{B}_1$ y en la base $\mathcal{B}_3$.
   e) Calcular las coordenadas del vector $\vec{y} = 2\vec{w}_1 - \vec{w}_3$ en la base $\mathcal{B}_1$ y en la base $\mathcal{B}_2$.

16. El vector $\vec{v}_1 = (1,3,0)$ tiene coordenadas $C_{\mathcal{B}}[\vec{v}_1] = (1,0,0)$ en la base $\mathcal{B}$, el vector $\vec{v}_2 = (3,8,0)$ tiene coordenadas $C_{\mathcal{B}}[\vec{v}_2] = (0,2,0)$ y $\vec{v}_3 = (0,1,1)$ tiene coordenadas $C_{\mathcal{B}}[\vec{v}_3] = (0,0,1)$. Hallar los tres vectores que forman la base $\mathcal{B}$.

▪ Subespacios vectoriales

17. Comprueba que el conjunto de pares de números reales (a,b) cuyas componentes suman cero, es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$. Y el conjunto de pares de números reales cuyas componentes suman 5, ¿es también un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$?

18. Comprobar si los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales:

   a) $A = \{(x, 2x, z) \text{ tal que } x, z \in \mathbb{R}\}$ (Ecuaciones paramétricas)
   b) $B = \{(x, y, x+y) \text{ tal que } x, y \in \mathbb{R}\}$ (Ecuaciones paramétricas)
   c) $C = \{(x, y, z) \text{ tal que } x = z+1\}$ (Ecuaciones cartesianas)

19. Estúdiese si los siguientes subconjuntos constituyen un subespacio vectorial con las operaciones inducidas.

   a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x - y = 0\}$
   b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x - y = 1\}$
   c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } y = x^2\}$
   d) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } xy = 0\}$
   e) $A = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x, y \in \mathbb{R}\}$

f) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $x + y + z = 0\}$

g) $A = \{(x, y, -y, x) \in \mathbb{R}^4$ tal que $x, y \in \mathbb{R}\}$

h) $A = \{M \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que $tr(M) = 0\}$, donde $tr(M)$ indica la suma de los elementos de la diagonal principal de M.

20. Sea el sistema $S = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ con $\vec{u} = (2, 1, 3)$, $\vec{v} = (-2, 1, 4)$ obtener las ecuaciones paramétricas y cartesianas del subespacio engendrado por S.

21. En el espacio vectorial de $\mathbb{R}^4$, determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales:

    a) $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)$ tal que $x_3 \cdot x_4 = 0\}$

    b) $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)$ tal que $x_3 + x_4 = 0\}$

    c) $C = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)$ tal que $x_3 + x_4 = 1\}$

22. Demostrar que los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

    a) $A = \{(x, y, z, -x)$ tal que $x, y, z \in \mathbb{R}\}$

    b) $B = \{(3y, y, x + y, x)$ tal que $x, y \in \mathbb{R}\}$

    c) $C = \{(x, 2x, 3x, 4x)$ tal que $x \in \mathbb{R}\}$

23. Demostrar que el conjunto de matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} a-3b & 4b \\ -4b & a+3b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

    es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}$. Hallar una base de este subespacio y su dimensión.

24. Sea el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$, $V = \{(x, y, z, t)$ tal que $x + y - 2t = 0, x - y - z = 0\}$ calcular la dimensión, una base y las ecuaciones paramétricas.

25. Sea el subespacio vectorial $V = \{(0, a, b, a + 2b)$ tal que $a, b \in \mathbb{R}\}$. Determinar la dimensión, una base y las ecuaciones cartesianas del subespacio vectorial.

26. Determinar la dimensión, una base y las ecuaciones paramétricas y cartesianas del subespacio vectorial engendrado por los vectores $a = (1, 2, 0, 3)\,, b = (3, 1, -1, -1)\,, c = (-1, 3, 1, 7)$ y $d = (4, 3, -1, 2)$

27. Determinar a y b para que el vector (1,0,a,b) pertenezca al subespacio engendrado por (1,4,-5,2) y (1,2,3,-1).

28. Dados los subespacios vectoriales F, engendrado por los vectores $\{(1,0,2),(2,0,4)\}$ y G determinado por las ecuaciones $2x+y+z=0$, $x-y+2z=0$. Hallar la dimensión, una base y las ecuaciones paramétricas y cartesianas de los subespacios $F, G, F\cap G$ y $F+G$.

29. Consideremos los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} F_1 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ tal que } z=0\right\} \\ F_2 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ tal que } x=y=0\right\} \\ F_3 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ tal que } x=0, y=z\right\} \end{aligned}$$

   a) Probar que $\mathbb{R}^3 = F_1+F_2+F_3$.

   b) Probar que $F_1\cap F_2\cap F_3 = \{\vec{0}\}$ y también que $F_1\cap F_2 = \{\vec{0}\}$, $F_1\cap F_3=\{\vec{0}\}$ y $F_2\cap F_3 = \{\vec{0}\}$.

   c) Buscar dos descomposiciones diferentes para $\vec{0}$ de la forma $\vec{0} = \vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3$ con $\vec{v}_1\in F_1$, $\vec{v}_2\in F_2$, $\vec{v}_3\in F_3$ (con lo que se demostrará que R^3 no es suma directa de F_1, F_2 y F_3.

   d) Comprobar (con la misma finalidad) que $(F_1+F_2)\cap F_3 \neq \{\vec{0}\}$.

30. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios W_1 y W_2 engendrados, respectivamente, por los sistemas de vectores:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(1,0,1,0\},(0,1,0,1),(1,1,1,1)\} \\ S_2 &= \{(1,0,0,0),(2,1,0,1),(5,1,0,1)\} \end{aligned}$$

   Hallar:

   a) Bases y dimensión de W_1 y W_2.

   b) Ecuaciones y base de $W_1{+}W_2$.

   c) Ecuaciones y base de $W_1\cap W_2$.

31. Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ tal que } x+y=0\} \\ W_2 &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ tal que } y-z=0\} \end{aligned}$$

   a) Calcular $W_1\cap W_2$ y $W_1{+}W_2$.

   b) Comprobar si se verifica $W_1\oplus W_2 = \mathbb{R}^3$.

Capítulo 4

Aplicaciones Lineales

4.1. Definiciones

Definición 20 *Sean V y W dos espacios vectoriales, una aplicación lineal f de V a W es una aplicación $f : V \to W$ tal que:*

1. $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ *para todo* $\vec{u}, \vec{v} \in V$

2. $f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *y para todo* $\vec{u} \in V$.

Las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales también son denominadas **homomorfismos**.

Proposición 6 *Si f es una aplicación lineal, es equivalente a decir que para todo α y $\beta \in \mathbb{R}$ y para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$ se tiene que:*

$$f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v}).$$

4.2. Matriz asociada a una aplicación lineal

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo de los números reales, $\mathbb{R}$. Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal, $\mathcal{B}_V = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n})$ una base de V y $\mathcal{B}_W = \{\vec{w_1}, \vec{w_2}, ..., \vec{w_m})$ una base de W. El elemento $f(\vec{u_1})$ es un vector de W y por tanto puede escribirse como una combinación lineal de elementos de la base $\mathcal{B}_W$:

$$f(\vec{u_1}) = a_{11}\vec{w_1} + a_{21}\vec{w_2} + ... + a_{m1}\vec{w_m}$$

Análogamente:

$$f(\vec{u_i}) = a_{1i}\vec{w_1} + a_{2i}\vec{w_2} + ... + a_{mi}\vec{w_m}$$

para $i = 1, 2, ..., n$.
De este modo podemos construir la siguiente matriz:

$$A_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}$$

La matriz $A_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}$ es la matriz de la aplicación f con respecto a las bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$.

Si tenemos ahora cualquier otro vector $\vec{x} \in V$, $C_{\mathcal{B}_V}[\vec{x}] = (x_1, x_2, ..., x_n)$, a través de la aplicación lineal f se tiene que $f(\vec{x}) = y$, donde $y \in W$ luego $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$. En forma matricial obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

4.3. Núcleo e imagen de una aplicación lineal

Definición 21 *Diremos que una aplicación lineal f entre los espacios vectoriales V y W es* **inyectiva** *si para todo x e $y \in V$ con $x \neq y$ se tiene que $f(x) \neq f(y)$. Cuando f es inyectiva la aplicación lineal también se denomina* **monomorfismo**.

Definición 22 *Diremos que una aplicación lineal f entre los espacios vectoriales V y W es* **sobreyectiva o suprayectiva** *si para todo $w \in W$ existe un elemento $v \in V$ con $f(v) = w$. Cuando f es sobreyectiva la aplicación lineal también se denomina* **epimorfismo**.

Definición 23 *Diremos que una aplicación lineal f entre los espacios vectoriales V y W es* **biyectiva** *si es inyectiva y sobreyectiva a la vez. Cuando f es biyectiva la aplicación lineal también se denomina* **isomorfismo**.

En el caso particular de que los espacios vectoriales de origen y llegada sean iguales, $V = W$ la aplicación lineal también se denomina **endomorfismo**, y si además el endomorfismo es biyectivo entonces se denomina **automorfismo**.

Otro caso particular de aplicación lineal es el caso donde $W = \mathbb{R}$, el cuerpo de los números reales, en ese caso la aplicación lineal se denomina **forma lineal**.

Definición 24 *Dada una aplicación lineal f entre los espacios vectoriales V y W, $f : V \to W$, definimos el* **núcleo o kernel** *de la aplicación lineal como el conjunto de todos aquellos $\vec{v} \in V$ tales que $f(\vec{v}) = \vec{0}$. Es decir:*

$$\mathcal{N}(f) = Ker(f) = \{\vec{v} \in V \ \ tal\ que\ f(\vec{v}) = \vec{0}\}.$$

Observar que el $Ker(f)$ nunca es vacío ya que $0 \in Ker(f)$.

Proposición 7 *Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal entre los espacios vectoriales V y W, entonces $Ker(f)$ es un subespacio vectorial de V.*

Proposición 8 *Una aplicación lineal es inyectiva si y sólo si $Ker(f) = \{0\}$*

Teorema 5 *Dada una aplicación lineal f entre los espacios vectoriales V y W, $f : V \to W$, si V es de dimensión finita entonces:*

$$\dim(ker(f)) + \dim(img(f)) = \dim(V)$$

Definición 25 *Definimos el* **rango**, *$rang(f)$ de una aplicación lineal f como el rango de la matriz asociada la aplicación lineal.*

Del Teorema 1 obtenemos el siguiente resultado:

a) f es inyectiva si y sólo si $rang(f) = \dim(V)$.

b) f es sobreyectiva si y sólo si $rang(f) = \dim(W)$.

Diremos que dos espacios vectoriales cualesquiera son **isomorfos** si podemos encontrar un isomorfismo entre ellos. Para que esto ocurra entre espacios vectoriales de dimensión finita la dimensión de ambos debe ser la misma.

Teorema 6 *Dado un número natural cualquiera n todos los espacios vectoriales de dimensión n sobre un mismo cuerpo son isomorfos.*

4.4. Cambio de base para aplicaciones lineales

Sea f una aplicación lineal que va del espacio vectorial V al espacio vectorial W. Sea $\mathcal{B}_{V1}$ una base de V, $\mathcal{B}_{W1}$ una base de W y $A_{\mathcal{B}_{W1}}^{\mathcal{B}_{V1}}$ la matriz asociada a la aplicación lineal respecto de las bases $\mathcal{B}_{V1}$ y $\mathcal{B}_{W1}$.

Consideremos a continuación otras dos bases de ambos espacios vectoriales, $\mathcal{B}_{V2}$ base de V y $\mathcal{B}_{W2}$ base de W. En este caso la matriz asociada a la aplicación lineal será $A_{\mathcal{B}_{W2}}^{\mathcal{B}_{V2}}$. Queremos saber la relación que existe entre ambas matrices.

Sea $M_{\mathcal{B}_{V1}}^{\mathcal{B}_{V2}}$ matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_{V2}$ a $\mathcal{B}_{V1}$ y $M_{\mathcal{B}_{W1}}^{\mathcal{B}_{W2}}$ la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_{W2}$ a $\mathcal{B}_{W1}$, de manera que la relación entre las matrices asociadas a la aplicación lineal según la base considerada es la siguiente:

$$A_{\mathcal{B}_{W2}}^{\mathcal{B}_{V2}} = \left(M_{\mathcal{B}_{W1}}^{\mathcal{B}_{W2}}\right)^{-1} \cdot A_{\mathcal{B}_{W1}}^{\mathcal{B}_{V1}} \cdot M_{\mathcal{B}_{V1}}^{\mathcal{B}_{V2}}$$

EJERCICIOS

- ### Aplicaciones Lineales

1. Determina cuáles de las siguientes aplicaciones $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ son transformaciones lineales:

   (a) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1, x_3)$; (b) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 1, x_2 + 2, 0)$;
   (c) $f(x_1, x_2, x_3) = (0, x_1 + x_2, 0)$; (d) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2, x_3, x_1)$.

2. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 2) = (2, 3)$ y $f(0, 1) = (1, 4)$. Halla $f(x, y)$.

3. Estudiar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales entre los espacios vectoriales dados:

   a) $f(x, y, z) = (x + y, z)$
   b) $f(x, y) = (x + y, 0)$
   c) $f(x, y) = (x, y + 2)$
   d) $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}) \quad f(A) = AB$ donde $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
   e) $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad f(A) = A + B$ donde $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ es fija.
   f) $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad f(A) = AB - BA$ donde $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ es fija.
   g) $f : P_n[x] \to P_n[x], \quad f(p(x)) = p(x + 1)$.
   h) $f : P_n[x] \to P_n[x], \quad f(p(x)) = p(x) + 1$.

4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es lineal, y se tiene que $f(1, 2) = (-1, 0, 2)$ y $f(2, 1) = (0, 2, -1)$. Halla $f(3, 3)$ y $f(0, -1)$.

5. Dadas $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f(a, b) = (a, a + b, b)$, y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, g(a, b, c) = (a + b, c)$, calcular $f \circ g$ y $g \circ f$.

6. Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales V y W. Demostrar las siguientes proposiciones:

   a) La imagen del elemento neutro de V mediante f es el elemento neutro de W, es decir, $f(\vec{0_V}) = \vec{0_W}$.
   b) La imagen mediante F del opuesto de un elemento $\vec{v} \in V$ es el opuesto de $f(\vec{v})$, es decir, $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$.

c) La imagen mediante f de cualquier subespacio de V es un subespacio vectorial de W.

d) La imagen mediante una aplicación lineal de un subespacio vectorial de dimensión k es un subespacio vectorial de dimensión no superior a k.

e) Sea $B = \vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ una base del espacio vectorial V y sean $\vec{w_1}$, $\vec{w_2}$,...,$\vec{w_n}$, n vectores cualesquiera del espacio vectorial W. En estas condiciones, existe una única aplicación lineal f de V a W tal que:

$$f(\vec{e_j}) = \vec{w_j}, j = 1, 2, ..., n$$

Matriz de una aplicación lineal

7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = (x + y, z, x + z)$. Encontrar la matriz de f con respecto a la base canónica. Hallar la imagen mediante f de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.

   a) $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $x + y + z = 0\}\}$

   b) $V_2 = \{(x, y, 0)$ tal que $x, y \in \mathbb{R}\}$

   c) $V_3 = \{(x, y, z) = t(1, -1, 1)$ tal que $t \in \mathbb{R}\}$

   En cada caso indicar la dimensión del subespacio y la dimensión de su imagen mediante f.

8. Hallar las matrices de las siguientes aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ respecto de la base canónica:

   a) Giro de α grados con respecto al eje z.

   b) Simetría con respecto a la recta $x = 0$, $y = 0$.

   c) Simetría con respecto a la recta $x = y$, $z = 0$.

   d) Proyección sobre el plano $x - y + z = 0$.

   e) Proyección respecto a la recta $(x, y, z) = t(1, 1, 1)$.

Núcleo e imagen de una aplicación

9. Sea la aplicación $f : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ con $f(A) = Traza(A)$.

   a) Prueba que f es una aplicación lineal.

b) Calcula el núcleo de f y da una base del mismo.

10. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida como $f(x, y, z) = (x - y, x + z)$.

    a) Probar que f es una aplicación lineal.

    b) Determinar las ecuaciones paramétricas y cartesianas del núcleo y de la imagen.

    c) Encontrar una base del núcleo y otra de la imagen.

    d) Comprobar que se verifica el teorema núcleo-imagen (Teorema 1).

    e) Clasificar f.

11. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$f(e_1) = 3e_1 - 2e_2 + e_3, \quad f(e_2) = e_1 + e_2, \quad f(e_3) = 2e_1 - 3e_2 + e_3$$

    Calcular:

    a) Matriz de la aplicación lineal.

    b) Ecuaciones de f.

    c) Ecuaciones paramétricas y cartesianas del núcleo y de la imagen.

12. Dadas las aplicaciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definidas por $f(x, y) = (x + y, x)$ y $g(x, y) = (2x, 3x - y)$, calcular las expresiones algebráicas y matriciales de $g \circ f$, $f \circ g$ y $f + g$.

13. Sea $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz de una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$. Calcular:

    a) Expresión algebráica de f.

    b) $f(-1, 2, 3)$.

    c) Estudiar si existe algún vector (x, y, z) cuya imagen sea el vector $(1, -1)$.

    d) Ecuaciones paramétricas y cartesianas del núcleo y de la imagen

    e) Comprobar que se verifica el teorema núcleo-imagen.

    f) Clasificar f.

    g) Calcular la matriz de f respecto de las bases:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{(1, 0, 1), (0, 0, -1), (2, 1, 1)\} \text{ de } \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{B}' &= \{(1, 0), (1, 1)\} \text{ de } \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

14. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \alpha & 2 & 2 \\ 6 & 3 & \beta \end{pmatrix}$. Calsificar f según los distintos valores de α y β.

15. Demostrar que si $S = \{\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_n}\}$ son linealmente independientes, entonces, $\{f(\vec{x_1}), f(\vec{x_2}), ..., f(\vec{x_n})\}$ son linealmente independientes si y sólo si f es inyectiva.

16. Describir el núcleo y la imagen de las siguientes aplicaciones lineales, indicando si son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas:

    a) $M_B : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 1}$ donde $M_B(A) = AB$ con $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

    b) La aplicación derivación de $P_n[x]$ en $P_{n-1}[x]$.

17. Clasifica el endomorfismo $f(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$. Encuentra las ecuaciones algebráicas de f^{-1}, f^2 en los casos en que sea posible.

Cambios de base para aplicaciones lineales

18. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por

$$f(u_1, u_2, u_3) = (u_1 - u_2 + 2u_3, u_1 + 3u_2)$$

    y las bases $\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, -1), (2, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(-2, 1), (1, -1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Calcular:

    a) Matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

    b) Matriz asociada a f respecto de la base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ y la canónica de $\mathbb{R}^2$.

    c) Matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y la base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^2$.

    d) Matriz asociada a f respecto de la base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ y la base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^2$.

19. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$f(u_1, u_2, u_3) = (u_1 - u_2 + u_3, 4u_2 - u_3, u_1 + u_2 + 5u_3)$$

    $\mathcal{B} = \{(1, 2, 1), (3, 1, 0), (-1, 3, 1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y el vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ de coordenadas (-1,1,1) en la base $\mathcal{B}$. Calcular:

    a) Las coordenadas del vector $f(\vec{v})$ en la base canónica.

b) Las coordenadas de $f(\vec{v})$ respecto de la base $\mathcal{B}$.

20. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal tal que

$$f(3,-5) = (1,1,1,1), \quad f(-1,2) = (2,1,0,-2)$$

Calcular:

a) Hallar la expresión de la aplicación f, es decir, dado un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ determinar $f(\vec{v})$.

b) Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$.

c) Determinar el subespacio imagen de la aplicación lineal f y su dimensión.

21. Sea la aplicación f definida por:

$f(\vec{u_1}) = f(1,0,0) = (1,2)$
$f(\vec{u_2}) = f(1,1,0) = (1,1)$
$f(\vec{u_3}) = f(1,1,1) = (0,2)$

donde se considera la siguiente base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$. Halla:

a) Matriz asociada a f respecto de las bases $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ y la canónica de $\mathbb{R}^2$.

b) Matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

22. Se define una aplicación f por:

$f(\vec{e_1}) = f(1,0) = (1,2,0,-1)$
$f(\vec{e_2}) = f(0,1) = (0,1,-1,0)$

Sabiendo que las coordenadas de $f(\vec{e_1})$ y $f(\vec{e_2})$ están referidas a la base $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4} = \{\vec{v_1} = (1,0,0,0), \vec{v_2} = (1,1,0,0), \vec{v_3} = (1,1,1,0), \vec{v_4} = (1,1,1,1)\}$. Calcula:

a) Matriz asociada a f referida a la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}$.

b) Matriz asociada a f referida a las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$.

c) $f(1,-2)$ en las canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$.

Capítulo 5

Diagonalización de Endomorfismos. Forma canónica de Jordan

5.1. Matrices diagonales. Propiedades

Llamamos **matriz diagonal** a una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Recodemos que si A es una matriz diagonal:

- Su determinante es el producto de los elementos de la diagonal.
- $A = A^t$.
- La matriz imversa es también diagonal y sus elementos son los elementos inversos de A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

5.2. Introducción a la diagonalización de endomorfismos

En el capítulo anterior vimos que toda aplicación lineal entre espacios vectoriales tenía asociada una matriz respecto de una base determinada y que esta matriz determina la aplicación.

Si consideramos otra base, odemos calcular la matriz asociada a la aplicación respecto de la nueva base (A') utilizando la matriz de cambio de base (P)

$$A' = P^{-1}AP$$

A la vista de esto, podemos preguntarnos si dada una aplicación podemos encontrar una base de manera que la matriz A' respecto de la nueva base sea más sencilla que respecto de la base antigua. De hecho, lo mejor sería que fuese *diagonal*.
Desgraciadamente no todas las matrices son diagonalizables, el objetivo de este capítulo es encontrar la forma *más sencilla* en que podemos transformar una matriz mediante un cambio de base.

En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ consideremos el subespacio $V_1 = \{(x_1, x_2, 0)$ tal que $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Si consideramos la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y S es la simetría con respecto al subespacio vectorial V_1, se tiene que

$$S(\vec{e}_1) = \vec{e}_1, \;\; S(\vec{e}_2) = \vec{e}_2, \;\; S(\vec{e}_3) = -\vec{e}_3$$

Por lo tanto la matriz respecto de la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- **Podemos definir la simetría respecto de cualquier subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.**

Consideremos ahora el subespacio $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $x - y + 2z = 0\}$. Queremos encontrar las ecuaciones de la aplicación SIMETRÍA respecto de la base canónica. La idea es buscar otra base (de $\mathbb{R}^3$) en la que la matriz de la aplicación sea lo más sencilla posible. Esta base la componen dos vectores del subespacio V_2 y otro perpendicular a ambos. Por ejemplo $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1 = (1, 1, 0), \vec{u}_2 = (-2, 0, 1), \vec{u}_3 = (1, -1, 2)\}$.
La simetría cumplirá

$$S(\vec{u}_1) = \vec{u}_1, \;\; S(\vec{u}_2) = \vec{u}_2, \;\; S(\vec{u}_3) = -\vec{u}_3$$

de manera que la matriz buscada es

$$S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Utilizando la matriz de cambio de base (de $\mathcal{B}$ a la base canónica)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz S respecto de la base canónica sabiendo que $S = PS'P^{-1}$

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

La expresión algebráica de la aplicación queda

$$S(x,y,z) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z, \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z, -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z\right)$$

Son dos las razones fundamentales por las que puede ser *necesario* simplificar la matriz asociada a una aplicación:

1. Es una razón puramente computacional: en ocasiones, para resolver algunos problemas necesitamos realizar varias operaciones con las matrices asociadas a las aplicaciones (exponenciar una matriz, ...), estas operaciones se complican si la matriz tiene muchas entradas (es decir, pocos ceros).

   Ejemplo (Rotación)
   Sea R_α la rotación en el plano de un ángulo α. Supongamos que queremos rotar un punto 9 veces. Esto supone componer la rotación tantas veces como queremos rotar el punto. Sea

   $$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

   La aplicación que buscamos tendrá como matriz asociada la matriz

   $$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}^9$$

   Estos cálculos resultan terriblemente tediosos. El objetivo de este capítulo será encontrar una matriz más sencilla en la que realizar estas operaciones.

2. La segunda razón es más geométrica. Si observamos con atención algunas aplicaciones lineales veremos que hay subespacios vectoriales cuyos vectores, al transformarlos mediante una aplicación, siguen perteneciendo al mismo subespacio.

Observamos, por ejemplo, en la simetría del primer ejemplo del apartado anterior, los vectores del plano siguen estando en dicho plano; o en una rotación en el espacio respecto al eje Z, los puntos de dicho eje siguen perteneciendo al eje después de girarlos.

A este tipo de subespacios los llamamos **invariantes**.

5.3. Subespacios Invariantes. Diagonalización de matrices.

Sean V y W dos espacios vectoriales, al conjunto de todas las aplicaciones lineales que van de V a W las denotaremos por $L(V, W)$. Al conjunto de endomorfirmos de V en si mismo lo denotaremos por $L(V)$.

Definición 26 *Dado un espacio vectorial V y una aplicación lineal f de V a V, diremos que el subespacio W de V es invariante respecto a f si $f(W) \subset W$, es decir, la imagen $f(\vec{x})$ de todo vector $\vec{x} \in W$ es un elemento de W.*

Definición 27 *Un vector $\vec{x} \neq \vec{0}$ de un espacio vectorial V sobre el cuerpo de los números reales se llama **vector propio** de la aplicación lineal $f \in L(V)$ si existe un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$$

*este número λ se denomina **valor propio** de la aplicación f correspondiente al vector $\vec{x}$.*

Los vectores y valores propios son también denominados **autovectores** y **autovalores** respectivamente.

5.3.1. Cómo calcular los vectores y valores propios de una aplicación lineal:

Sea $f \in L(V)$ donde V es un espacio de dimensión n, sea A la matriz asociada a f y consideremos la matriz identidad I_n de orden n. Para cualquier $\vec{x} \in V$ tenemos que $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, si además este vector es un vector propio de la aplicación lineal f tendremos entonces que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$, por tanto:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

hay que tener en cuenta que $\vec{x} = I_n\vec{x}$ luego podemos escribir la expresión anterior como:

$$A\vec{x} - \lambda I_n\vec{x} = (A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}$$

de este modo obtenemos una ecuación matricial donde:

1. Hay que obtener los valores de λ para los cuales la ecuación matricial tiene soluciones distintas a la trivial ($\vec{x} = \vec{0}$).

2. Determinar para cada solución λ_i, cuales son los vectores propios asociados.

Como queremos que las soluciones del sistema matricial sean distintas de la trivial, el sistema debe ser compatible indeterminado, lo cual implica:

$$|A - \lambda I_n| = 0$$

a este determinante lo denominaremos **ecuación característica**. El desarrollo de $|A-\lambda I_n| = 0$ es un polinomio de grado n en λ que se denomina **polinomio característico**. Los valores propios de la matriz A los la raíces de dicho polinomio.

Teorema 7 *La condición necesaria y suficiente para que λ sea un valor propio de la matriz cuadrada A es $|A - \lambda I_n| = 0$.*

- **Multiplicidades algebráicas y geométricas**

Definición 28 *Sea f un endomorfismo del espacio vectorial V de dimensión n. Sea A a matriz asociada a dicho endomorfismo y λ un autovalor de A.*

1. *Se llama **multiplicidad algebráica** de λ al orden de multiplicidad **m** de λ como raíz del polinomio característico.*

2. *Se llama **multiplicidad geométrica** de λ a la dimensión **g** del subespacio propio asociado a λ.*

- **Propiedades**

Dada una matriz A de orden n. Entonces:

1. A y A^t tienen los mismo autovalores.

2. Si λ es un autovalor de A, entonces $k\lambda$ es un autovalor de kA.

3. Si λ es un autovalor de A y A es regular, entonces $\frac{1}{\lambda}$ es un autovalor de A^{-1}

4. Si λ es un autovalor de A, entonces λ^n es un autovalor de A^n.

5. Los autovalores de un endomorfismo idempontente ($f = f^2$, por tanto su matriz asociada verifica que $A = A^2$) de un espacio vectorial son $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$.

Los vectores propios asociados a cada λ_i se obtienen resolviendo el sistema homogéneo siguiente para cada λ_i:

$$(A - \lambda_i I_n)\vec{x} = \vec{0}$$

Como $|A - \lambda_i I_n| = 0$ es un sistema compatible indeterminado, si $\vec{x}$ es una solución del sistema, entonces $\alpha\vec{x}$ también lo es, donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Por tanto, la solución de $(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}$ es un subespacio vectorial que denominaremos *subespacio vectorial propio*.

- **Propiedades de los vectores y valores propios:**

1. A todo vector propio $\vec{x}$ le corresponde un único valor propio.

2. Sea $S(\lambda)$ el conjunto de vectores propios asociados a un mismo autovalor λ. El conjunto $S_1(\lambda) = S(\lambda) \cup \{\vec{0}\} = \ker(A - \lambda I_n)$ es un subespacio vectorial de V.

3. El número de vectores propios que son linealmente independientes entre los correspondientes a un valor propio λ_i es igual a $\dim(V) - rango(A - \lambda_i I_n)$.

4. Si $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_r$ son los r autovalores distintos del endomorfismo f, los autovectores asociados son linealmente independientes.

5.3.2. Diagonalización por semejanza

Definición 29 *Dos matrices cuadradas del mismo tamaño, A y A', decimos que son **matrices semejantes** si están asociadas a un mismo endomorfismo, es decir, si son tales que existe una matriz P regular que cumple que*

$$A' = P^{-1}AP$$

- **Propiedades**

1. Si A y B son semejantes, entonces tienen el mismo determinante, $|A| = |B|$.

2. Si A y B son semejantes, entonces A^n y B^n son semejantes.

3. Si A y B son semejantes, entonces tiene la misma traza, $traza(A) = traza(B)$

Definición 30 *Sea A un matriz cuadrada. Se dice que una matriz es* ***diagonalizable por semejanza*** *si existe una matriz diagonal semejante a A, es decir, existe una matriz regular P y una matriz diagonal D tales que $D = P^{-1}AP$.*

Ya sabemos que un endomorfismo es diagonalizable si y sólo si existe una base del espacio vectorial formada por autovalores. Existe otra forma de saber si la matriz es diagonalizable estudiando las multiplicidades de los autovalores.

Proposición 9 *Si los distintos autovalores de f son $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ con multiplicidades algebráicas $m_1, m_2, ..., m_k$ y multiplicidades geométricas $g_1, g_2, ..., g_k$, entonces f (o A) es* ***diagonalizable*** *si y sólo si se verifica:*

1. $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = \dim(V)$
2. $g_i = m_i$, *para todo* $i = 1, 2, ...k$

- **Forma diagonal**

Una vez que hemos comprobado que el endomorfismo es diagonalizable, las formas diagonales son:

- La matriz A es diagonal en una base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ de V formada por los vectores que forman las bases de los subespacios propios.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

  $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ son los autovalores de f cada uno de ellos repetido tantas veces como indique su multiplicidad algebráica. λ_i es el autovalor asociado a $\vec{u}_i$

- La matriz D es igual a $D = P^{-1}AP$ donde las columnas de P están formadas por las coordenadas de los vectores de las bases de los respectivos subespacios propios.

Ejemplo:

Dado el siguiente endomorfismo, estudiar si es diagonalizable y, en caso afirmativo, calcular su diagonalización:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-11x_1 - 10x_2 + 5x_3, 4x_2, -15x_1 - 10x_2 + 9x_3)$$

1. En primer lugar calculamos la matriz asociada a dicho endomorfismo respecto de la base canónica en $\mathbb{R}^3$, obteniendo

$$A = \begin{pmatrix} -11 & -10 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -15 & -10 & 9 \end{pmatrix}$$

Para saber si el endomorfismo es diagonalizable tenemos que calcular los autovectores asociados a A, para ello calculamos el polinomio característico $P(\lambda)$.

$$P = \begin{vmatrix} -11-\lambda & -10 & 5 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -15 & -10 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-24) = -(\lambda-4)^2(\lambda+6)$$

Las raíces del polinomio son $\lambda_1 = -6$ y $\lambda_2 = 4$ cuyas multiplicidades algebráicas respectivas son $m_1 = 1$ y $m_2 = 2$.

   a) Calculemos ahora los subespacios propios:

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } (A+6I)\vec{x} = \vec{0}\right\} = \\ &= \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x_1 = x_3, x_2 = 0\right\} \\ V_2 &= \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } (A-4I)\vec{x} = \vec{0}\right\} = \\ &= \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } 3x_1+2x_2-x_3 = 0\right\} \end{aligned}$$

   Por lo tanto:

$$g_1 = \dim(V_1) = 1 = m_1 \text{ y } g_2 = \dim(V_2) = 2 = m_2$$

   se cumple que

$$g_1 + g_2 = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

   b) $m_1 = g_1$ y $m_2 = g_2$. Entonces el endomorfismo es diagonalizable

2. La matriz diagonal es, por tanto,

$$D = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Además, unas bases para los subespacios propios son $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,1)\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(1,0,3),(0,1,2)\}$, una base en la que el endomorfismo es diagonal es $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(1,0,3),(0,1,2)\}$ y se cumple que

$$D = P^{-1}AP$$

donde

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

5.3.3. Diagonalización ortogonal

Existe un tipo de endomorfismo que siempre es diagonalizable: el endomorfismo simétrico. Este tipo de endomorfismo tiene la particularidad de encontrar una base ortonormal en la que diagonalizar su matriz asociada.

Definición 31 *Sea A una matriz cuadrada de elementos reales. Se llama matriz* ***ortogonal*** *a aquella matriz que cumple que:*

$$A^t = A^{-1}$$

Además se cumple que si A es ortogonal entonces $|A| = \pm 1$. Si A es la matriz asociada a un endomorfismo de un espacio vectorial V y es ortogonal, entonces los vectores fila de A forman una base ortonormal del espacio vectorial.

Definición 32 *Sea f un endomorfismo del espacio vectorial V de dimensión n. Se dice que f es* ***simétrico*** *si*

$$\vec{u} \cdot f(\vec{v}) = f(\vec{u}) \cdot \vec{v}, \quad \vec{u}, \vec{v} \in V$$

Si A es la matriz asociada al endomorfismo en una base V, entonces f es simétrico si y sólo si A es simétrica. Esto es muy fácil de ver:

$$\vec{u} \cdot f(\vec{v}) = \vec{u} A \vec{v} \text{ como } A \text{ es simétrica } A = A^t, \text{ luego } \vec{u} A \vec{v} = \vec{u} A^t \vec{v} = (A\vec{u})^t \vec{v} = f(\vec{u}) \cdot \vec{v}$$

Teorema 8 (Teorema espectral) *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n. Sea f un endomorfismo simétrico en dicho espacio vectorial, entonces existe una base ortonormal de V formada por autovectores de f.*

Para diagonalizar la matriz asociada al endomorfismo simétrico ortogonalmente tenemos que buscar una base ortonormal de V en la que la matriz D sea diagonal. Para ello uniremos las bases ortonormales de los subespacios propios. La diagonal de la matriz D estará formada por los autovalores de f.

Ejemplo:

Diagonalizar el siguiente endomorfismo calculando una matriz de autovectores ortogonal.

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 2x_3, -x_2, 2x_1 - x_3)$$

Escribimos la matriz asociada a la aplicación respecto de la base canónica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & \text{-1} & 0 \\ 2 & 0 & \text{-1} \end{pmatrix}$$

Esta matriz es simétrica, lo que supone que endoformismo es diagonalizable. Buscamos, por tanto, una matriz diagonal D tal que $D = P^{-1}AP = P^tAP$, ya que queremos que P sea ortogonal.

1. El polinomio característico de la matriz A es

$$P = (-1 - \lambda)(\lambda - 3)(\lambda + 2)$$

   Por lo tanto los autovalores son $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ y $\lambda_3 = 3$ todos ellos con multiplicidad uno.
   Los subespacios asociados a cada uno de ellos son

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x_1 = 0, x_3 = 0\} \\ V_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x_2 = 0, 2x_1 + x_3 = 0\} \\ V_3 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x_1 = 0, 2x_3 - x_1 = 0\} \end{aligned}$$

2. Una base para cada uno de ellos es $\mathcal{B}_1 = \{(0, 1, 0)\}$, $\mathcal{B}_2 = \{(1, 0, -2)\}$ y $\mathcal{B}_3 = \{(2, 0, 1)\}$. Estos vectores son ortogonales dos a dos, ya que los autovalores son distintos, sin embargo no constituyen una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ ya que no son unitarios.

3. Normalizándolos obtenemos

$$\mathcal{B} = \{(0, 1, 0), (1/\sqrt{5}, 0, -2/\sqrt{5}), (2/\sqrt{5}, 0, 1/\sqrt{5})\}$$

   Dichos vectores son las columnas de la matriz ortogonal P y D es la matriz diagonal buscada, así tenemos:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \text{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \text{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5.4. Aplicaciones

5.4.1. Potencia y exponencial de una matriz

Sea A una matriz cuadrada de orden n y D una matriz diagonal, tal que $D = P^{-1}AP$, entonces:

1. $A^k = PD^kP^{-1}$
2. $\mathrm{e}^A = P\mathrm{e}^D P^{-1}$

Si D es una matriz diagonal, entonces:

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}^D = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

5.4.2. Teorema de Cayley-Hamilton

Teorema 9 *Toda matriz A satisface su polinomio característico.*

Sea D la forma diagonal asociada a la matriz A

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Calcular:

$$2A^4 - 7A^3 + 9A^2 - 5A + I$$

Como el polinomio característico de A es el mismo que el de una matriz semejante a ella, es igual al polinomio característico de D, que es:

$$P = (1-\lambda)^2\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) = -\left(\lambda^3 - \frac{5}{2}\lambda^2 + 2\lambda - \frac{1}{2}\right)$$

Por el teorema de Cayley-Hamilton se cumple que:

$$-\left(A^3 - \frac{5}{2}A^2 + 2A - \frac{1}{2}I\right) = 0 \Rightarrow 2A^3 - 5A^2 + 4A - I = 0 \Rightarrow 2A^4 - 5A^3 + 4A^2 - A = 0$$

Por lo tanto

$$2A^4 - 7A^3 + 9A^2 - 5A + I = \left(2A^4 - 5A^3 + 4A^2 - A\right) - 2A^3 + 5A^2 - 4A + I = 0$$

5.5. Forma canónica de Jordan

Hemos visto que no todas las matrices son diagonalizables. Esto podía ocurrir cuando en una matriz A la dimensión del subespacio invariante generado por un autovalor no coincide con la multiplicidad del autovalor.

$$\dim(S_1(\lambda_i)) = g_i < m_i$$

donde λ_i es una raíz del polinomio característico de multiplicidad m_i.
Nuestro objetivo ahora es encontrar una matriz J lo más sencilla posible, semejante a la matriz cuadrada A, es decir, existe una matriz regular (invertible) P tal que

$$J = P^{-1}AP$$

5.5.1. Forma canónica de Jordan de orden 2

Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Caso A: Las raíces del polinomio característico son reales y distintas $\lambda_1 \neq \lambda_2$. En este caso la matriz A es diagonalizable y su forma canónica de Jordan coincide con la matriz diagonal.

$$J = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Caso B: Las raíces del polinomio característico son reales y coinciden $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Calculamos $S_1(\lambda)$ que es el subespacio invariante asociado al autovalor λ.

$$S_1(\lambda) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } A\vec{v} = \lambda\vec{v}\} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}\} = \ker(A - \lambda I)$$

(a) Si $\dim(S_1(\lambda)) = 2$ entonces existe una base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovectores, por tanto A es diagonalizable. En este caso la matriz diagonal es:

$$J = D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

(b) Si $\dim(S_1(\lambda)) = 1$ entonces no podemos encontrar una base en $\mathbb{R}^2$ de autovectores de A, aplicamos el siguiente lema.

Lema 1 *Si A tiene dos autovalores iguales λ entonces* $(A - \lambda I)^2 = 0$

Demostración: Si λ_o es un autovalor doble de una matriz 2×2, el polinomio característico será $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_o)^2$. Por teorema de Cayley-Hamilton, sabemos que toda matriz satisface su polinomio característico, por lo tanto se cumplirá que $(A - \lambda_o I)^2 = 0$

A través de este lema tenemos entonces que $(A-\lambda I)^2 = 0$, es decir, $\ker((A-\lambda I)^2) = \mathbb{R}^2$. Definimos el subespacio $S_2(\lambda) = \ker((A-\lambda I)^2) = \mathbb{R}^2$. Como $n_1 = \dim(S_1(\lambda)) = 1$ podemos encontrar un vector $\vec{u}_2$ tal que

$$\vec{u}_2 \in S_2(\lambda) - S_1(\lambda)$$

es decir, un vector $\vec{u}_2 \in S_2(\lambda)$, pero $\vec{u}_2 \notin S_1(\lambda)$. Tomamos:

$$\vec{u}_1 = (A - \lambda I)\vec{u}_2$$

Puede verse fácilmente que $\vec{u}_1 \in S_1(\lambda)$, ya que $(A - \lambda I)\vec{u}_1 = (A - \lambda I)^2\vec{u}_2 = \vec{0}$. Además $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son linealmente independientes y ninguno de ellos es el vector nulo, por tanto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ son una base de $\mathbb{R}^2$. En esta base tenemos:

$$(A - \lambda I)\vec{u}_1 = \vec{0} \Rightarrow A\vec{u}_1 = \lambda\vec{u}_1$$

$$(A - \lambda I)\vec{u}_2 = \vec{u}_1 \Rightarrow A\vec{u}_2 = \vec{u}_1 + \lambda\vec{u}_2$$

Por lo tanto la matriz de la aplicación lineal en esta base es:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$, la forma de Jordan asociada será $J = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ y la matriz de paso $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, con $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, dado que $S_1(6) = \ker(A - 6I) = \{(\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \alpha \in \mathbb{R}\}$

Proposición 10 *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ siempre se puede encontrar una matriz $J \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de alguna de las formas siguientes:*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

y una matriz $P \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de determinante no nulo (invertible) tal que:

$$A = PJP^{-1}$$

5.5.2. Forma canónica de Jordan de orden 3

Consideremos ahora una matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Caso A: Las raíces del polinomio característico son reales y distintas $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$. En este caso la matriz A es diagonalizable y su forma canónica de Jordan coincide con la matriz diagonal.

$$J = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Caso B: $\lambda_1 = \lambda_2$ es una raíz doble y λ_3 es una raíz simple.

(a) Si $\dim(S_1(\lambda_1)) = 2$ entonces A es diagonalizable y en este caso la matriz de Jordan asociada a la matriz A es la matriz diagonal.

$$J = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(b) Si $\dim(S_1(\lambda_1)) = 1$ entonces con $S_1(\lambda_1)$ y $S_1(\lambda_3)$ no se genera un conjunto de vectores que sean base de todo el espacio $\mathbb{R}^3$. De nuevo calculamos $S_2(\lambda_1) = \ker((A-\lambda_1 I)^2)$ y tomamos $\vec{u}_2 \in S_2(\lambda_1) - S_1(\lambda_1)$, posteriormente tomamos $\vec{u}_1 = (A-\lambda_1 I)\vec{u}_2$. Tomamos $\vec{u}_3 \in S_1(\lambda_3)$. El conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ sí es una base de $\mathbb{R}^3$, la matriz asociada a la matriz A respecto de la nueva base es, por lo tanto:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Tomemos la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La forma de Jordan asociada a esta matriz será $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, dado que $|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow (2-\lambda)^2(1-\lambda) = 0$ y tenemos que

$S_1(2) = \ker(A - 2I) = \{(\alpha, 0, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \alpha \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim(S_1(2)) = 1$

$S_2(2) = \ker((A - 2I)^2) = \{(\alpha - \beta, \beta, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim(S_2(2)) = 2$

$S_1(1) = \ker(A - I) = \{(0, 0, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \alpha \in \mathbb{R}\}$

Caso C: λ es una raíz triple del polinomio característico:

(a) Si $\dim(S_1(\lambda)) = 3$ entonces A es diagonalizable y en este caso la matriz de Jordan asociada a la matriz A es la matriz diagonal.

$$J = D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

(b) Si $\dim(S_1(\lambda)) = 2$, calculamos $S_2(\lambda) = \ker((A-\lambda I)^2)$, buscamos $\vec{u}_3 \in S_2(\lambda) - S_1(\lambda)$ y tomamos $\vec{u}_2 = (A - \lambda I)\vec{u}_3 \in S_1(\lambda)$. Como $S_1(\lambda)$ es un espacio de dimensión 2, podemos encontrar $\vec{u}_1 \in S_1(\lambda)$ linealmente independiente de $\vec{u}_2 \in S_1(\lambda)$. De este modo tendremos que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, que cumple que:

$$\begin{aligned} A\vec{u}_1 &= \lambda\vec{u}_1 \\ A\vec{u}_2 &= \lambda\vec{u}_2 \\ A\vec{u}_3 &= \vec{u}_2 + \lambda\vec{u}_3 \end{aligned}$$

En dicha base la matriz semenjante a A es la forma de Jordan siguiente:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Si tenemos la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, la matriz de Jordan asociada será

$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, con $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, dado que:

$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow (1 + \lambda)^3 = 0$, por lo tanto $\lambda = -1$ es un autovalor triple.

Además $S_1(-1) = \ker(A + I) = \{(\alpha - \beta, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$
$\Rightarrow n_1 = \dim(S_1(-1)) = 2$ y $(A + I)^2 = 0 \Rightarrow S_2(-1) = \ker((A + I)^2) \equiv \mathbb{R}^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow n_2 = \dim(S_2(-1)) = 3$

Tomamos $\vec{u}_3 = (0, 0, 1) \in S_2(-1) - S_1(-1)$, $\vec{u}_2 = (A + I)\vec{u}_3 = (-1, 0, 1) \in S_1(-1)$ y $\vec{u}_1 = (1, 1, 0) \in S_1(-1)$ linealmente independiente de $\vec{u}_2$

(c) Si $\dim(S_1(\lambda)) = 1$, calculamos $S_2(\lambda) = \ker((A-\lambda I)^2)$. Tendremos que $\dim(S_2(\lambda)) = 2$ y, por tanto, $S_2(\lambda)$ no cubre todo $\mathbb{R}^3$ y deberemos calcular $S_3(\lambda) = \ker((A-\lambda I)^3)$, donde de forma similar que en el Lema 1 tenemos que $(A-\lambda I)^3 = 0$, por tanto $S_3(\lambda) = \mathbb{R}^3$. Elegimos $\vec{u}_3 \in S_3(\lambda) - S_2(\lambda)$ y tomamos

$$\vec{u}_2 = (A-\lambda I)\vec{u}_3 \quad \text{y} \quad \vec{u}_1 = (A-\lambda I)\vec{u}_2$$

Se da la siguiente relación de inclusión

$$S_1(\lambda) \subsetneq S_2(\lambda) \subsetneq S_3(\lambda) = \mathbb{R}^3$$

Ahora $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ sí son base de $\mathbb{R}^3$ y en esta base tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} A\vec{u}_1 & = & \lambda\vec{u}_1 \\ A\vec{u}_2 & = & \vec{u}_1 + \lambda\vec{u}_2 \\ A\vec{u}_3 & = & \vec{u}_2 + \lambda\vec{u}_3 \end{array}$$

por lo tanto la matriz de Jordan asociada será:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, al calcular su matriz de Jordan obtenemos $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dado que el polinomio característico de la matriz es $|A-\lambda I| = (1-\lambda)^3$, por lo tanto $\lambda = 1$ es una raíz triple y además:

$S_1(1) = \ker(A-I) = \{(\alpha,\alpha,\alpha) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \alpha \in \mathbb{R}\} \Rightarrow n_1 = \dim(S_1(1)) = 1$

$S_2(1) = \ker((A-I)^2 = \{(\alpha,\beta,\alpha) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} \Rightarrow n_2 = \dim(S_2(1)) = 2$

$(A-I)^3 = 0 \Rightarrow S_3(1) = \ker((A-I)^3) \equiv \mathbb{R}^3 \Rightarrow n_3 = \dim(S_3(1)) = 3$

Tomamos $\vec{u}_3 = (0,0,1) \in S_3(1) - S_2(1)$, $\vec{u}_2 = (A-I)\vec{u}_3 = (1,0,1) \in S_2(1) - S_1(1)$ y $\vec{u}_1 = (A-I)\vec{u}_2 = (1,1,1) \in S_1(1)$

5.5.3. Forma canónica de Jordan de orden n

Ahora ya estamos preparados para calcular la matriz de Jordan asociada a una matriz de cualquier orden.

Primero de todo denominaremos matriz elemental de Jordan de orden k y autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ a la matriz $J_k(\lambda)$ cuyos elementos son todos nulos, excepto los de la diagonal principal, que toman el valor λ y los situados inmendiatamente encima de la diagonal que toman el valor 1:

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Llamaremos matriz de Jordan a cualquier matriz cuadrada formada por la yuxtaposición de matrices elementales a lo largo de la diagonal principal, de la forma:

$$\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{k_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

A continuación veamos como calcular la matriz de Jordan en un caso general a la vez que lo compaginamos con un ejemplo.

Consideremos el espacio vectorial V de dimensión n y el endomorfismo $f : V \longrightarrow V$

Primer paso: Calculamos la matriz asociada a la base canónica ya que es la más fácil de calcular en caso de que nos den las ecuaciones paramétricas o cartesianas del endomorfismo. O si nos dan la matriz de f asociada a cualquier otra base trataremos en ese caso de diagonalizarla. En cualquier caso, supongamos que conocemos la matriz asociada al endomorfismo,

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

Lo primero que haremos entonces es calcular su polinomio característico y sus raíces:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

en este caso tenemos r raíces distintas, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$, con multiplicidades algebráicas $m_1, m_2, ..., m_r$, respectivamente. Recordad que debe verificarse lo siguiente:

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = \dim(V) = n$$

Ejemplo - Primer Paso:
Supongamos el siguiente endomorfismo $f : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 7 & 2 & 6 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 8 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Calculamos el polinomio característico:

$P(\lambda) = |A-\lambda I| = 262144 - 196608\lambda + 61440\lambda^2 - 10240\lambda^3 + 960\lambda^4 - 48\lambda^5 + \lambda^6 = (\lambda-8)^6$

de manera que tenemos un único autovalor $\lambda = 8$ de multiplicidad algebráica $m = 6 = \dim(\mathbb{R}^6)$.

Segundo paso: Para cada autovalor λ (omitimos los subíndices para no hacer engorrosa la notación), calculamos la siguiente cadena de subespacios:

$$\{\vec{0}\} \subset S_1(\lambda) \subseteq S_2(\lambda) \subseteq \cdots \subseteq S_m(\lambda)$$

donde $S_k(\lambda) = \ker((A-\lambda I)^k)$. A partir de m, multiplicidad algebráica de λ, o incluso antes, la cadena se estabiliza, es decir, existe un número $p \leq m$ tal que para todo $n \geq p$ se tiene lo siguiente:

$$S_n(\lambda) = S_p(\lambda)$$

A $S_p(\lambda)$ se le denomina *subespacio máximo invariante* asociado al autovalor λ. Calculamos $n_j = \dim(S_j(\lambda))$ donde $j = 1, 2, ..., p$

$$0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_p = m$$

Por lo tanto tendremos

$$S_1(\lambda) \subsetneq S_2(\lambda) \subsetneq \cdots \subsetneq S_p(\lambda) = S_{p+1}(\lambda) = ... = S_m(\lambda)$$

Ejemplo - Segundo Paso:
Calculamos entonces $S_1(\lambda = 8) = \ker(A - 8I)$

$$\ker(A-8I) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 \text{ tal que } (A-8I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 7 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 - x_6 \\ 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se puede uno dar cuenta que la primera ecuación es igual que la cuarta y la sexta, pero con signo negativo y la quinta ecuación es el doble que la primera, por tanto tenemos el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 - x_6 \\ 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de este sistema es de rango tres y por tanto tenemos un sistema compatible indeterminado, con tres ecuaciones y seis incógnitas, de manera que podemos poner tres incógnitas en función de las otras tres, por ejemplo:

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_2 + x_3 \\ x_4 &= 5x_2 - 5x_3 + 2x_5 \\ x_6 &= -x_2 + x_3 - x_5 \end{aligned}$$

Una base de vectores de $S_1(8) = \ker(A - 8I)$ será por tanto:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

De manera que $\dim(\ker(A - 8I)) = \dim(S_1(8)) = n_1 = 3 < m = 6$.
Calculamos entonces $S_2(8) = \ker((A - 8I)^2)$

$$(A - 8I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\ker((A-8I)^2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 \text{ tal que } (A-8I)^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_5 - x_6 \\ x_1 - x_5 - x_6 \\ 2x_1 - 2x_5 - 2x_6 \\ -x_1 + x_5 + x_6 \\ 2x_1 - 2x_5 - 2x_6 \\ -x_1 + x_5 + x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de nuevo, podemos ver que todas las filas son dependientes entre sí, de manera que tenemos el siguiente sistema equivalente:

$$x_1 - x_5 - x_6 = 0 \Rightarrow x_1 = x_5 + x_6$$

Este sistema es compatible indeterminado, donde además los parámetros x_2, x_3 y x_4 quedan libres. Una base de vectores del subespacio $S_2(8) = \ker((A-8I)^2)$ será por tanto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

De nuevo tenemos que $\dim(\ker(A-8)) = n_1 < \dim(\ker((A-8I)^2)) = n_2 = 5 < m = 6$. Calculamos entonces $S_3(8) = \ker((A-8I)^3)$

$$(A-8I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por tanto, $\ker((A-8I)^3) = \mathbb{R}^6$ y podemos coger como base de $\ker((A-8I)^3)$ la base canónica de $\mathbb{R}^6$. En este caso $p = 3$ de manera que $S_3(8)$ y tendremos que $n_3 = 6 = m$ es en este caso el *subespacio máximo invariante*.

Tercer paso: Supongamos que $S_p(\lambda)$ es el subespacio máximo invariante, donde recordar que $p \leq m$ siempre, como $S_{p-1}(\lambda) \subsetneq S_p(\lambda)$ calculamos

$$\dim(S_p(\lambda) - S_{p-1}(\lambda)) = d_p = n_p - n_{p-1} \geq 1$$

y tomamos un conjunto de vectores de $S_p(\lambda)$ que no estén en $S_{p-1}(\lambda)$.
Sean $\{\vec{u}_m, \vec{u}_{m-1}, ..., \vec{u}_{m-d_p+1}\} \in S_p(\lambda) - S_{p-1}(\lambda)$.
Tenemos entonces que $V = \{\vec{u}_m, \vec{u}_{m-1}, ..., \vec{u}_{m-d_p+1}\} \oplus S_{p-1}(\lambda)$. Podemos comprobar fácilmente que

$$\left\{(A-\lambda I)\vec{u}_m, (A-\lambda I)\vec{u}_{m-1}, ..., (A-\lambda I)\vec{u}_{m-d_p+1}\right\} \in S_{p-1}(\lambda)$$

y son un conjunto de vectores linealmente independientes, pero además

$$\left\{(A-\lambda I)\vec{u}_m, (A-\lambda I)\vec{u}_{m-1}, ..., (A-\lambda I)\vec{u}_{m-d_p+1}\right\} \cap S_{p-2}(\lambda) = \left\{\vec{0}\right\}$$

pero

$$\left\{(A-\lambda I)\vec{u}_m, (A-\lambda I)\vec{u}_{m-1}, ..., (A-\lambda I)\vec{u}_{m-d_p+1}\right\} \cup S_{p-2}(\lambda) \subseteq S_{p-1}(\lambda)$$

por tanto como $d_p = \dim(S_p(\lambda) - S_{p-1}(\lambda))$ se verifica lo siguiente

$$d_p + n_{p-2} \leq n_{p-1} \Rightarrow d_p \leq n_{p-1} - n_{p-2} = d_{p-1}$$

de manera que también tenemos el siguiente resultado

$$d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_{p-1} \geq d_p \geq 1$$

Este proceso se sigue hasta encontrar una base de vectores de V respecto de la cual la matriz del endomorfismo sea de la forma

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ejemplo - Tercer Paso:
En nuestro ejemplo tenemos que $\dim(S_3(8) - S_2(8)) = d_3 = n_3 - n_2 = 1$, tomamos un

vector de $S_3(8)$ que no esté en $S_2(8)$, por ejemplo

$$\vec{u}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

comprobamos que $\vec{u}_5 = (A - 8I)\vec{u}_6 \in S_2(8)$

$$(A - 8I) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in S_2(8)$$

Este vector no pertenece a $S_1(8) = \ker(A - 8I)$, pero en cambio sí pertenece el vector

$$\vec{u}_4 = (A - 8I)\vec{u}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_1(8)$$

Por otro lado $\dim(S_2(8) - S_1(8)) = d_2 = n_2 - n_1 = 2$, tenemos que $\vec{u}_5 \in S_2(8) - S_1(8)$, pero nos falta otro vector, de manera que buscamos otro vector de $S_2(8)$ que no esté en $S_1(8)$ y que sea linealmente independiente de $\vec{u}_5$, por ejemplo

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y comprobamos que

$$\vec{u}_2 = (A - 8I)\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

pertenece a $S_1(8)$

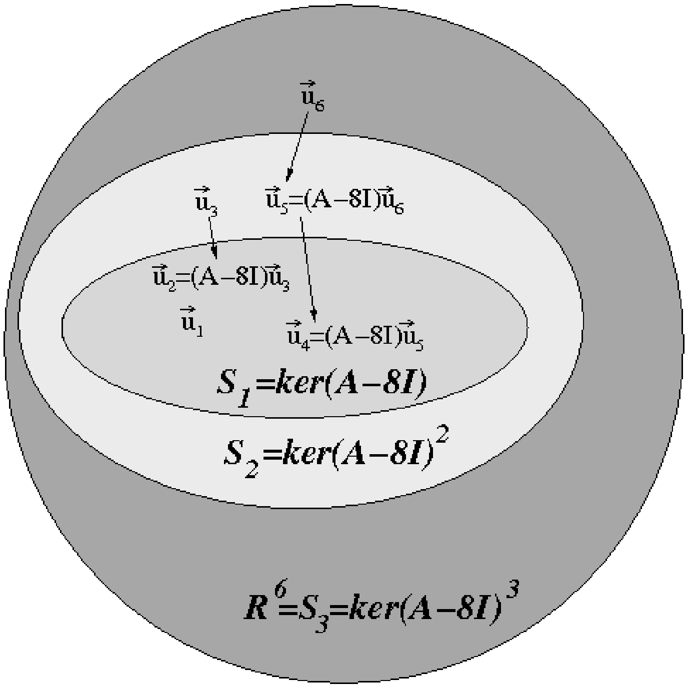
$$(A - 8I)\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por último, sabemos que $\dim(S_1(8)) = d_1 = n_1 = 3$, y como tanto $\vec{u}_2$ como $\vec{u}_4$ pertenecen a $S_1(8)$ y son linealmente independientes necesitamos otro vector para completar una base de $S_1(8)$. Tomamos por ejemplo

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

El conjunto de vectores $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5, \vec{u}_6\}$ forman una base de $\mathbb{R}^6$. Calculamos cual es la matriz asociada al endomorfismo respecto de esta base sabiendo que

$$\begin{array}{lll}
\vec{u}_5 = (A - 8I)\vec{u}_6 & \Rightarrow & A\vec{u}_6 = \vec{u}_5 + 8\vec{u}_6 \\
\vec{u}_4 = (A - 8I)\vec{u}_5 & \Rightarrow & A\vec{u}_5 = \vec{u}_4 + 8\vec{u}_5 \\
\vec{u}_4 \in S_1(\lambda = 8) & \Rightarrow & A\vec{u}_4 = 8\vec{u}_4 \\
\vec{u}_2 = (A - 8I)\vec{u}_3 & \Rightarrow & A\vec{u}_3 = \vec{u}_2 + 8\vec{u}_3 \\
\vec{u}_2 \in S_1(\lambda = 8) & \Rightarrow & A\vec{u}_2 = 8\vec{u}_2 \\
\vec{u}_1 \in S_1(\lambda = 8) & \Rightarrow & A\vec{u}_1 = 8\vec{u}_1
\end{array}$$



por lo tanto, la matriz asociada será

$$J = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

5.5.4. Cálculo de las cajas de Jordan

Para cada autovalor realizaremos el siguiente cálculo.

Supongamos que λ es un autovalor de multiplicidada algebráica m. Puede ocurrir:

1. $\dim(S_1(\lambda)) = n_1 = m$
   En este caso existen m autovectores linealmente independientes asociados a λ que forman una base de $S_1(\lambda)$ y la matriz del endomorfismo asociada a dicha base es

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ & m) & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

2. $\dim(S_1(\lambda)) = n_1 < m$

   a) Calculamos la cadena de subespacios

   $$\{\vec{0}\} \subset S_1(\lambda) \subsetneq S_2(\lambda) \subsetneq \cdots \subsetneq S_p(\lambda)$$

   siendo el *subespacio máximo invariante* $S_p(\lambda)$, donde $p \leq m$ y $n_j = \dim(S_j(\lambda)), j = 1, 2, ..., p$.
   Sabemos también que $\dim(S_j(\lambda) - S_{j-1}(\lambda)) = d_j = n_j - n_{j-1}, j = 1, 2, ..., p$ donde $d_1 = n_1$ además se verifica lo siguiente:

   $$d_j + n_{j-2} \leq n_{j-1} \quad \Rightarrow \quad d_j \leq n_{j-1} - n_{j-2} = d_{j-1} \quad \Rightarrow \quad d_p \leq d_{p-1} \leq \cdots \leq d_1$$

   b) Tenemos la siguiente información:

   - d_p nos indica las cajas de Jordan de orden p
   - $d_{p-1} - d_p$ nos indica las cajas de Jordan de orden $p - 1$

   $\vdots$

   - $d_1 - d_2$ nos indica las cajas de Jordan de orden 1

Ejemplo:
Supongamos que disponemos de la siguiente información $A \in \mathcal{M}_{12\times 12}$ donde $|A - \lambda I| =$
$= (\lambda - 1)^4(\lambda - 2)^6(\lambda + 1)^2$

$$\begin{array}{lll} rang(A - I) = 10; & \dim(S_1(2)) = 3; & rang(A + I) = 11; \\ rang((A - I)^2) = 9; & \dim(S_2(2)) = 6; & rang((A + I)^2) = 10; \\ rang((A - I)^3) = 8 & & \end{array}$$

y queremos construir la matriz de Jordan.

1. $\lambda = 1$ es un autovalor de multiplicidad algebráica 4.
   Como $rang(A - I) = 10$ entonces $n_1 = \dim(S_1(1)) = 12 - 10 = 2 < 4$
   Como $rang((A - I)^2) = 9$ entonces $n_2 = \dim(S_2(1)) = 12 - 9 = 3 < 4$
   Como $rang((A - I)^3) = 8$ entonces $n_3 = \dim(S_3(1)) = 12 - 8 = 4$
   Tenemos entonces que:
   $$\left.\begin{array}{l} d_3 = n_3 - n_2 = 1 \\ d_2 = n_2 - n_1 = 1 \\ d_1 = 2 \end{array}\right\} \text{Por tanto tenemos:}$$
   $d_3 = 1$ cajas de Jordan de orden 3
   $d_2 - d_3 = 0$ cajas de Jordan de orden 2
   $d_1 - d_2 = 1$ cajas de Jordan de orden 1

2. $\lambda = 2$ es un autovalor de multiplicidad algebráica 6.
   Tenemos $n_1 = \dim(S_1(2)) = 3$ y $n_2 = \dim(S_2(2)) = 6$ de manera que:
   $\left.\begin{array}{l} d_2 = n_2 - n_1 = 3 \\ d_1 = 3 \end{array}\right\}$ Por tanto tenemos:
   $d_2 = 3$ cajas de Jordan de orden 2
   $d_1 - d_2 = 0$ cajas de Jordan de orden 1

3. $\lambda = -1$ es un autovalor de multiplicidad algebráica 2.
   Como $rang(A+I) = 11$ entonces $n_1 = \dim(S_1(-1)) = 12 - 11 = 1 < 2$
   Como $rang((A+I)^2) = 10$ entonces $n_2 = \dim(S_2(-1)) = 12 - 10 = 2$
   Tenemos entonces:
   $\left.\begin{array}{l} d_2 = n_2 - n_1 = 1 \\ d_1 = 1 \end{array}\right\}$ Por tanto:
   $d_2 = 1$ cajas de Jordan de orden 2
   $d_1 - d_2 = 0$ cajas de Jordan de orden 1

4. Ya podemos construir la matriz de Jordan asociada al endomorfismo:

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & & & & & & & & & \\
0 & 1 & 1 & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & 2 & 1 & & & & & & \\
 & & & & 0 & 2 & & & & & & \\
 & & & & & & 2 & 1 & & & & \\
 & & & & & & 0 & 2 & & & & \\
 & & & & & & & & 2 & 1 & & \\
 & & & & & & & & 0 & 2 & & \\
 & & & & & & & & & & -1 & 1 \\
 & & & & & & & & & & 0 & -1
\end{pmatrix}$$

5.5.5. Aplicaciones: Potencia y exponencial de una matriz

Sea A una matriz cuadrada de orden n y J su forma de Jordan tal que $J = P^{-1}AP$, entonces:

1. $A^k = PJ^kP^{-1}$

2. $\mathrm{e}^A = P\mathrm{e}^J P^{-1}$

- Si J es una matriz diagonal, entonces:

$$J^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} \qquad \mathrm{e}^J = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

- Si J no es diagonal, entonces:

$$J^k = \begin{pmatrix} \boxed{J_1^k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{J_2^k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{J_n^k} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{e}^J = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{e}^{J_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{\mathrm{e}^{J_2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{\mathrm{e}^{J_n}} \end{pmatrix}$$

Donde e^{J_i} se calcula de la siguiente forma: sea $J_i = (\lambda_i I + N_i)$ y n_i el orden de J_i, donde

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $\mathrm{e}^{J_i} = \mathrm{e}^{\lambda_i}\mathrm{e}^{N_i}$:

$$\mathrm{e}^{J_i} = \mathrm{e}^{\lambda_i} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n_i-2)!} & \frac{1}{(n_i-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{1!} & \cdots & \frac{1}{(n_i-3)!} & \frac{1}{(n_i-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{1}{(n_i-4)!} & \frac{1}{(n_i-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Sea J la siguiente matriz:

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

tenemos entonces que:

$$\mathrm{e}^J = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^3 & \mathrm{e}^3 & \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^3 & \frac{1}{6}\,\mathrm{e}^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^3 & \mathrm{e}^3 & \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^3 & \mathrm{e}^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^4 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS

▪ Diagonalización de endomorfismos

1. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$. Hallar los valores propios y vectores propios. Razonar si es diagonalizable y obtener la matriz de paso que permite diagonalizarla.

2. Hallar los valores propios y vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

3. Sea $A = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$. Encontrar una fórmula de recurrencia que dé la potencia n-ésima de la matriz A.

4. Una matriz A es **idempotente** si $A = A^2$. Probar que si A es idepontente sus únicos valores propios son 0,1.

5. Encontrar un cambio de base que diagonalice si es posible las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Calcular $f(A) = A^4 + A^2 + A$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

7. Sea la aplicación definida por:

$$f(x, y, z) = (7x - 2y + z, -2x + 10y - 2z, x - 2y + 7z)$$

   Diagonalizar si es posible por un cambio de base ortogonal su matriz asociada A. Indicar la nueva base $\mathbb{R}^3$ a la que está referida la matriz diagonal.

8. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$. Estudiar para que valores reales de α y β puede diagonalizarse.

9. Demostrar que toda matriz estocástica $A = (a_{ij}),\ i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., n$ con $\sum_{k=1}^{n} a_{kj} = 1, \forall j$ y $a_{ij} \geq 0$ tiene el autovalor 1.

10. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que 2 es un autovalor de A, hallar todos los autovalores de A sin necesidad de calcular el polinomio característico. Sugerencia: utilizar el resultado del ejercicio anterior.

11. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Probar que es diagonalizable y encontrar una matriz ortogonal P que permita dicha diagonalización.

b) Diagonalizar A^2 y A^{-1}.

12. Calcular aplicando el teorema de Cayley-Hamilton la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Considerando la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y A la matriz asociada a un endomorfismo referida a dicha base, se sabe que los subespacios

$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x+y+z = 0\}$ y $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x-y = 0, z-y = 0\}$

están asociados respectivamente a los autovalores $\lambda = 1$ y $\lambda = \frac{1}{2}$. Calcular:

a) La matriz diagonal asociada al endomorfismo.

b) Calcular la matriz $M = 2A^4 - 7A^3 + 9A^2 - 5A + I$

c) Calcular la matriz $N = A^{-3} - 4A^{-2} + 5A^{-1} + 4I$

14. Describir razonadamente las *dinámicas fundamentales* del movimiento de un móvil de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_{t+1} = \frac{5}{2}x_t + 3y_t \\ y_{t+1} = -\frac{3}{2}x_t - 2y_t \\ z_{t+1} = -6x_t - 6y_t - \frac{1}{2}z_t \end{cases}$$

donde $\{x_t, y_t, z_t\}$ representa las coordenadas de la posición del móvil en t-ésima transición.

a) Si el móvil inicialmente se encuentra en el punto $(1, 0, 1)$ donde se encuentra en la vigésima transición.

b) ¿Existen posiciones invariantes?

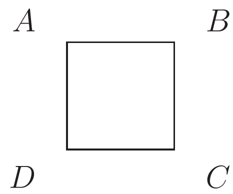
c) ¿Qué ocurre a largo plazo si la posición inicial se encuentra en la recta que pasa por el origen y tiene la dirección del vector $(-1, 1, 0)$ o la del vector $(0, 0, 1)$?

15. En Soria hay dos supermercados de alimentación, Villar y Muñoz. Se sabe que el 70 % de los que van a comprar al supermercado Villar vuelven a comprar al año siguiente, pasándose el 30 % a la competencia. Análogamente, el 60 % de los que compran un año en el autoservicio Muñoz vuelven a comprar en dicho establecimiento al año próximo, pasándose el 40 % restante a comprar al supermercado Villar.
En el año 2001 entraron 1200 clientes en el supermercado Muñoz. ¿Cuántos clientes entraron en el supermercado Villar en el año 2001 si en el año 2002 entraron el mismo número de clientes en ambos establecimientos?

16. Siendo x_0 e y_0 las poblaciones iniciales de conejos y zorros respectivamente, se sabe que el número de conejos en cualquier mes es la mitad de la población de conejos del mes anterior y que el número de zorros en dicho mes es la suma de la población de zorros más la mitad de la de conejos en el mes anterior. Calcular las poblaciones de zorros y conejos a largo plazo. ¿Se extinguirá alguna de las especies mencionadas? Razonar la respuesta.

17. Un estudio realizado sobre la comunidad de ingenieros superiores en telecomunicaciones revela el hecho siguiente: el 90 % de los hijos de padres ingenieros superiores en telecomunicaciones cursan estudios de ingeniería en telecomunicaciones y sólo el 20 % de los que no lo hicieron consiguen que sus hijos cursen dicha carrera. ¿Cuál será el porcentaje de estudiantes que cursarán la carrera de ingeniería superior en telecomunicaciones después de muchas generaciones suponiendo un sólo hijo como descendencia en cada familia?

18. Una rana que se encuentra en el vértice de un cuadrado tiene probabilidad $1/2$ de ir, de un salto, a cada vértice contiguo. Si inicialmente está en el vértice A, hallar la probabilidad de que se encuentre en cada uno de los vértices después de n saltos.



19. Una agencia naviera tiene su flota distribuída entre los puertos de Barcelona, Málaga y Mallorca. De los barcos que al comienzo de cada mes están en Barcelona, al final del mes sólo vuelve la mitad, un 20 % se va a Málaga y el resto a Mallorca; de los que están en Málaga, a fin de mes un 20 % se va a Barcelona, un 40 % a Mallorca y el resto vuelve a Málaga; y de los que estaban a principio de mes en Mallorca, un 80 % regresa y el resto va a Barcelona.
Suponiendo que la flota es constante.

    a) Plantear en forma matricial un modelo que represente la distribución de la flota.

    b) Sabiendo que en el instante actual hay 350, 500 y 200 barcos en Barcelona, Málaga y Mallorca, respectivamente, determinar el número de barco que habrá en cada puerto al cabo de k meses.

    c) ¿Cuál será la flota de barcos en cada puerto a largo plazo?.

20. Una agencia de transportes tiene la flota de camiones distribuída entre Madrid, Sevilla y Barcelona. De los camiones que hay al principio de cada mes en Madrid, al final del mes vuelven la mitad, la cuarta parte va a Sevilla y el resto a Barcelona; de los que están en Sevilla, la tercera parte vuelve y el reto va a Barcelona; y de los que estaban al principio en Barcelona, la mitad se va a Madrid, la cuarta parte a Sevilla y el reto vuelve a Barcelona. Suponiendo que el número de camiones de la flota permanece constante. Calcular el tanto por ciento de camiones que hay en cada ciudad al cabo de k meses.

▪ Matriz de Jordan

21. Reducir la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ a su forma de Jordan y dar la matriz de paso.

22. Encontrar la forma de Jordan de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y calcular A^5.

23. Encontrar la forma canónica de Jordan y el cambio de base correspondiente de las siguientes matrices:

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(g) $G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (h) $H = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

24. Demostrar que la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$f(x, y, z) = (x + z, 2y + z, 3z - x)$$

no es diagonalizable.

25. Hallar según los valores de a y b la forma canónica de Jordan de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

26. Calcular e^A, donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

27. Calcular e^A en los siguientes casos:

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 10-1 & 4 & 13 \\ 5 & 3-1 & 7 \\ -9 & -4 & -12-1 \end{pmatrix}; \quad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

28. Sea la matriz $A \in \mathcal{M}_{15\times 15}$ donde $A - \lambda I = (\lambda - 3)^5(\lambda + 2)^4(\lambda + 1)^3(\lambda - 1)^3$

$$\begin{array}{lll} rang(A-3I)=12; & \dim(S_1(-2))=2; & \dim(S_1(1))=1 \\ rang((A-3I)^2)=10; & \dim(S_2(-2))=4; & \dim(S_2(1))=2 \\ rang(A+I)=12; & & \end{array}$$

construir la matriz de Jordan.

Capítulo 6

Espacios Vectoriales Euclídeos

6.1. Definición de Espacio Euclídeo

6.1.1. Definición y ejemplos.

Una gran variedad de hechos geométricos se basan principalmente en la posibilidad de medir las longitudes de segmentos y los ángulos entre ellos. En el lenguaje de los espacios vectoriales no se incluyen las palabras *longitud* y *ángulo*. Lo que vamos hacer a continuación es añadir esas dos nuevas palabras a la estructura de espacio vectorial para dotarle de una nueva estructura matemática que contenga conceptos que no se pueden describir en el *lenguaje de espacio vectorial*.

Para ello definiremos en el espacio vectorial un tipo de multiplicación que llamaremos **producto escalar**. Será una operación no interna ya que la multiplicación de dos vectores no será un vector sino un escalar y a través de este producto escalar introduciremos los conceptos de *longitud* de un vector y de *ángulo* entre vectores.

Cuando trabajamos con un cualquier espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ definíamos el producto escalar del siguiente modo:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1, x_2, ..., x_n) \cdot (y_1, y_2, ..., y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

A partir de este producto escalar podíamos definir la norma de un vector:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

y el ángulo que forman dos vectores:

$$\cos\theta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|}$$

Por tanto, todo espacio vectorial que esté dotado de un producto escalar lo denominaremos **espacio euclídeo.**

Definición 33 (Espacio Euclídeo) *Un espacio vectorial real V se dice euclídeo si hay una regla que asigne a cada par de vectores $\vec{x}, \vec{y} \in V$ un número reral llamado* **producto escalar** *de los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$, que a partir de ahora lo designaremos $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ (para diferenciarlo del producto escalar usual), de manera que se cumplen las siguientes propiedades:*

a) *Simétrica: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$ para todo $\vec{x}$ e $\vec{y} \in V$.*

b) *Distributiva: $\langle \vec{x}, \vec{y} + \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle$ para todo $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z} \in V$.*

c) *$\langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ para todo $\vec{x}$ e $\vec{y} \in V$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$.*

d) *$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ para todo $\vec{x} \neq 0$.*

Ejemplos:

1. Supongamos dos vectores en $\mathbb{R}^2$, $\vec{x} = (x_1, x_2)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2)$ y definimos

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= x_1 y_1 + x_2 y_1 + y_2 x_1 + 2 y_2 x_2 \end{aligned}$$

   esta aplicación de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ es un producto escalar. Comprobarlo como ejercicio.

2. Si $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ y definimos $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1$, esto no es un producto escalar en $\mathbb{R}^2$. Comprobarlo como ejercicio.

3. Sea $\mathcal{C}([a, b])$ el espacio de las funciones reales continuas definidas en el intervalo $[a, b]$, y definimos el siguiente producto escalar de las funciones $f(x)$ y $g(x)$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx$$

   Se puede comprobar fácilmente que $\mathcal{C}([a, b])$ es un espacio euclídeo. Demostrarlo como ejercicio.

6.1.2. Matriz del producto escalar

Supongamos un espacio euclídeo E de dimensión finita n y sea $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ una base de E. En esta base tenemos que

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i, \qquad \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{e}_i$$

utilizando las propiedades (b) y (c) del producto escalar tenemos que:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i, \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{e}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle$$

esto se puede reescribir como:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = (x_1, x_2, ..., x_n) \begin{pmatrix} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_n, \vec{e}_1 \rangle \\ \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \vec{e}_1, \vec{e}_n \rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_n \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_n, \vec{e}_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

donde la matriz

$$P_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_n, \vec{e}_1 \rangle \\ \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \vec{e}_1, \vec{e}_n \rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_n \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_n, \vec{e}_n \rangle \end{pmatrix}$$

recibe el nombre de matriz del producto escalar con respecto a la base $\mathcal{B}$. Esta matriz es siempre simétrica y todos los elementos de su diagonal principal son positivos.

Podríamos preguntarnos si estas dos condiciones son suficientes y necesarias para que una matriz P sea matriz de un producto escalar. La respuesta a dicha pregunta es negativa. Para que un matriz cuadrada represente un producto escalar, dicha matriz debe ser *simétrica y definida positiva*. Cuando veamos formas bilineales y cuadráticas explicaremos más en detalle estas ca- racterísticas. De momento nos conformaremos con saber que una matriz es definida positiva si todos sus autovalores son positivos o, de forma equivalente, si todos sus menores principales son positivos.

Definimos los menores principales de una matriz dada $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ como los determinantes:

$$A_1 = a_{11}, \;\; A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \;\; A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, \;\; A_n = |A|$$

6.1.3. Longitudes, Ángulos y Ortogonalidad

La longitud, norma o módulo de un vector $\vec{x}$ en un espacio euclídeo E se define como

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}, \qquad \vec{x} \in E.$$

En el ejemplo 3 de la sección anterior, donde considerábamos las funciones reales continuas definidas en el intervalo $[a, b]$, tendríamos

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, dx}, \qquad f \in \mathcal{C}([a, b]).$$

Sabemos que todo vector de norma uno se denomina *unitario*, y también sabemos que todo vector $\vec{x}$ no nulo de un espacio euclídeo puede normalizarse simplemente dividiendo por su norma. De manera que definido un producto escalar podemos definir la bola unidad como todos aquellos vectores $\vec{x} \in E$ tales que $\|\vec{x}\| \leq 1$, mientras que la esfera unidad serán todos aquellos vectores tales que $\|\vec{x}\| = 1$.
¡Ojo!, tanto la bola como la esfera unitaria dependerán del producto escalar que estemos considerando.

Por último dados dos vectores cualesquiera pertenecientes a un espacio euclídeo E, definimos el coseno del ángulo que forman entre ellos dos como:

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|}$$

Para que está expresión tenga sentido necesitamos que el valor absoluto de este cociente sea menor o igual a 1, para ello tenemos la siguiente proposición.

Proposición 11 (Desigualdad de Schwarz) *En todo espacio euclídeo E,*

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|$$

para todo $\vec{x}$ e $\vec{y} \in E$.

EJERCICIO: Demostrar la proposición anterior.

Con el producto escalar dado en $\mathbb{R}^n$ la desigualdad de Schwarz se escribe de la forma:

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| = \left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

y en el espacio euclídeo $\mathcal{C}([a,b])$ tenemos

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b (f(x))^2\, dx} \sqrt{\int_a^b (g(x))^2\, dx}$$

Por último diremos que dos vectores de un mismo espacio euclídeo $\vec{x}, \vec{y} \in E$ son *ortogonales* o *perpendiculares* si su producto escalar es cero:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$$

Cuando trabajamos con el producto escalar usual y consideramos los espacios euclídeos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, la idea de ortogonalidad coincide con el hecho de que los vectores formen un ángulo de $\pi/2$ radianes (90°).

6.2. Bases Ortonormales

En un espacio euclídeo E una base se dice **ortogonal** si todos sus elementos son ortogonales dos a dos, si además todos los elementos de la base son de norma unitaria se dice que la base es **ortonormal**.

En el ejercicio 1 de este tema se demuestra que, en un espacio euclídeo, todo conjunto de vectores ortogonales dos a dos son linealmente independientes. Nos gustaría probar ahora que en todo espacio euclídeo existen bases ortogonales, para ello vamos a utilizar un *proceso de ortogonalización* que permite obtener una base ortogonal a partir de cualquier base del espacio vectorial. Este proceso es denominado **proceso de Gram-Schmidt**.

Teorema 10 (Método de Ortononalización) *Sean $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n, ...$ una sucesión finita o infinita de vectores linealmente independientes en un espacio euclídeo E y sea $L_k = L(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_k)$, el subespacio vectorial generado por los k primeros vectores. Entonces, existe un conjunto de vectores $\vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_k, ...$ tal que:*

a) *El subespacio vectorial* $L_k' = L(\vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_k)$ *coincide con* $L_k = L(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_k)$ *para todo entero positivo* k.

b) *El vector* $\vec{y}_{k+1}$ *es ortogonal a* L_k *para todo entero positivo* k.

Cuando decimos que $\vec{y}_{k+1}$ es ortogonal a L_k lo que queremos decir es que $\vec{y}_{k+1}$ es ortogonal a todos los vectores de L_k.

Teorema 11 *En todo espacio euclídeo* E *de dimensión finita existen bases ortonormales.*

Ejemplo:

Todo lo expuesto anteriormente se ve mucho más claro realizando un ejemplo. Dados los vectores $\vec{x}_1 = (1,0,0), \vec{x}_2 = (4,-2,0)$ y $\vec{x}_3 = (1,1,5)$ vamos a construir a través del **método de ortogonalización de Gram-Schmidt** tres vectores $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ e $\vec{y}_3$ tres vectores ortogonales entre sí, cuando en $\mathbb{R}^3$ consideramos en producto escalar usual.

1. Tomamos $\vec{y}_1 = \vec{x}_1$

2. Tomamos $\vec{y}_2 = \vec{x}_2 + \alpha\vec{y}_1$ y elegimos α de manera que $\vec{y}_1$ e $\vec{y}_2$ sean ortogonales:

$$0 = \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_2 = \vec{y}_1 \cdot (\vec{x}_2 + \alpha\vec{y}_1) = (\vec{y}_1 \cdot \vec{x}_2) + \alpha(\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_1)$$

   de donde se deduce que

$$\alpha = -\frac{(\vec{y}_1 \cdot \vec{x}_2)}{(\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_1)} = -\frac{(\vec{y}_1 \cdot \vec{x}_2)}{\|\vec{y}_1\|^2} = -\frac{(1,0,0)\cdot(4,-2,0)}{1} = -4$$

   de manera que $\vec{y}_2 = (4,-2,0) - 4(1,0,0) = (0,-2,0)$

3. Finalmente tomamos $\vec{y}_3 = \vec{x}_3 + \beta_1\vec{y}_1 + \beta_2\vec{y}_2$ y elegimos β_1 y β_2 de manera que $\vec{y}_3$ sea ortogonal a $\vec{y}_1$ e $\vec{y}_2$

$$0 = \vec{y}_3 \cdot \vec{y}_1 = (\vec{x}_3 + \beta_1\vec{y}_1 + \beta_2\vec{y}_2) \cdot \vec{y}_1 = (\vec{x}_3 \cdot \vec{y}_1) + \beta_1(\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_1)$$

   de donde tenemos que

$$\beta_1 = -\frac{(\vec{x}_3 \cdot \vec{y}_1)}{(\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_1)} = -\frac{(\vec{x}_3 \cdot \vec{y}_1)}{\|\vec{y}_1\|^2} = -\frac{(1,1,5)\cdot(1,0,0)}{1} = -1$$

   por otro lado

$$0 = \vec{y}_3 \cdot \vec{y}_2 = (\vec{x}_3 + \beta_1\vec{y}_1 + \beta_2\vec{y}_2) \cdot \vec{y}_2 = (\vec{x}_3 \cdot \vec{y}_2) + \beta_2(\vec{y}_2 \cdot \vec{y}_2)$$

de esta manera tenemos

$$\beta_2 = -\frac{(\vec{x}_3 \cdot \vec{y}_2)}{(\vec{y}_2 \cdot \vec{y}_2)} = -\frac{(\vec{x}_3 \cdot \vec{y}_2)}{\|\vec{y}_2\|^2} = -\frac{(1,1,5) \cdot (0,-2,0)}{4} = \frac{1}{2}$$

por tanto $\vec{y}_3 = (1,1,5) - (1,0,0) + \frac{1}{2}(0,-2,0) = (0,0,5)$

4. Como puede apreciarse $\vec{y}_1 = (1,0,0)$, $\vec{y}_2 = (0,-2,0)$, $\vec{y}_3 = (0,0,5)$ es una base ortogonal con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$.

6.3. Proyección ortogonal

6.3.1. Definiciones

Definición 34 *Diremos que dos subespacios W_1 y W_2 de un espacio vectorial euclídeo E son ortogonales, $W_1 \perp W_2$, si todos los vectores de W_1 son ortogonales a todos los vectores de W_2.*

Propiedades:

1. W_1 y W_2 son ortononales si y sólo si todos los vectores de una base de W_1 son ortogonales a cada uno de los vectores de una base de W_2.

2. Si $W_1 \perp W_2$ se tiene que $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$

Definición 35 *Dado un subespacio vectorial W de un espacio euclídeo E el conjunto*

$$W^{\perp} = \{\vec{y} \in E \text{ tal que } \vec{y} \perp \vec{x} \text{ para todo } \vec{x} \in W\}$$

es un subespacio vectorial de E (comprobarlo como ejercicio), que recibe el nombre de **complemento ortogonal** *de W.*

Proposición 12 *Sea W un subespacio vectorial de un espacio euclídeo E, entonces E es suma directa de W y $W^{\perp}$:*

$$E = W \oplus W^{\perp}$$

De esta proposición se deduce que

$$\dim(W) + \dim\left(W^{\perp}\right) = \dim(E)$$

A continuación vamos a definir lo que es la **proyección ortogonal** de un vector $\vec{x} \in E$ sobre un espacio vectorial W.
Si consideramos el subespacio vectorial W de un espacio euclídeo E, sabemos que $E = W \oplus W^{\perp}$, por tanto $\vec{x} \in E$ posee una descomposición única de la forma $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ donde $\vec{y} = P_W(\vec{x}) \in W$ y $\vec{z} = P_{W^{\perp}}(\vec{x}) \in W^{\perp}$, de manera que $\vec{y}$ será la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre W, mientras que $\vec{z}$ será la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre $W^{\perp}$.

El ángulo que forma un vector $\vec{x} \in E$ con un subespacio vectorial W se define como el ángulo que forma $\vec{x}$ con $P_W(\vec{x})$. Por lo tanto, tendremos que:

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{x}, P_W(\vec{x})\rangle}{\|\vec{x}\|\,\|P_W(\vec{x})\|} = \frac{\langle \vec{y}+\vec{z}, \vec{y}\rangle}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|} = \frac{\|\vec{y}\|^2}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|} = \frac{\|\vec{y}\|}{\|\vec{x}\|} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\|P_W(\vec{x})\|}{\|\vec{x}\|}$$

donde θ es el ángulo que forma $\vec{x}$ con el subespacio vectorial W.

6.3.2. Expresión matricial del vector proyección sobre un subespacio

Sea S un subespacio vectorial generado por el conjunto de vectores linealmente independientes $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k\}$ del espacio euclídeo E. Construímos la matriz A cuyas columnas están formadas por las coordenadas de los vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k\}$, entonces la proyección de cualquier vector sobre el subespacio S viene dada por

$$P_S(\vec{x}) = A(A^t\,P\,A)^{-1}A^t\,P\,\vec{x}$$

donde P es la matriz del producto escalar definido en el espacio euclídeo.

Por tanto $P_S = A(A^t\,P\,A)^{-1}A^t\,P$ la definiremos como la matriz proyección asociada al subespacio S.

Propiedades de la matriz proyección:

1. $P_S^2 = P_S$, es decir, la matriz proyección es idempotente.
2. Cuando consideramos el producto escalar habitual tenemos $P_S = A(A^t\,A)^{-1}A^t$ y entonces se cumple que $P_S^t = P_S$, es decir, P_S es simétrica.

Ejemplo:

Calcular la proyección ortogonal de los vectores $\vec{x} = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ e $\vec{y} = (1,2,-1) \in \mathbb{R}^3$ sobre el subespacio S generado por $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$, teniendo en cuenta el producto escalar habitual. Para ello primero calculamos la matriz de la proyección sobre S, teniendo en cuenta que $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$P_S = A\left(A^tA\right)^{-1}A^t, \text{ donde } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$P_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow P_S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Así, la proyección de $\vec{x}$ sobre S será:

$$P_S(\vec{x}) = P_S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_S(\vec{x}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Y la proyección de $\vec{y}$ sobre S será:

$$P_S(\vec{y}) = P_S \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_S(\vec{y}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{y}$$

ya que $\vec{y} \in S$

EJERCICIOS

▪ Producto escalar

1. Si los vectores no nulos $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ son todos ortogonales entre sí en un espacio euclídeo, demostrar que también son linealmente independientes.

2. ¿Cuáles de las siguientes funciones $\langle \ , \ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definen un producto escalar?:

   a) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 2y_1 x_2 - 3x_1 y_2$

   b) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2$

   c) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 3y_1 x_2 + 7x_2 y_2$

   d) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_1 y_2 + 3y_1 x_2$

   e) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2 + 2x_1 y_2 + 2y_1 x_2$

   Justificar la respuesta. Encontrar la matriz, en la base canónica, de aquellas funciones que sean producto escalar.

3. Encontrar la expresión analítica del módulo de un vector y del coseno del ángulo de dos vectores en $\mathbb{R}^2$ para aquellas de las funciones de ejercicio 2, que sean producto escalar.

4. Dada la siguiente matriz
$$\begin{pmatrix} 37 & 10 & -4 \\ 10 & 28 & 14 \\ -4 & 14 & 25 \end{pmatrix}$$

   a) Verificar que define un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ respecto de la base canónica.

   b) Hallar el producto escalar de los vectores $\vec{x} = (1, 0, 1)$, $\vec{y} = (0, 1, -2)$.

   c) Hallar un vector ortogonal al vector $\vec{x} = (1, 0, 1)$.

5. Se considera el espacio vectorial de los polinomios de segundo grado, $P_2[x] = \{ax^2 + bx + c,$ con $a, b, c \in \mathbb{R}\}$, y dados dos elementos de $P_2[x]$, se define la operación
$$\langle p(x) \cdot q(x) \rangle = \int_0^1 [p(t) \cdot q(t)]\, dt$$

   a) Demostrar que se ha definido así un producto escalar en $P_2[x]$.

   b) Calcular el producto escalar de $p(x) = x$ y $q(x) = 1 - x$.

6. En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ de las matrices reales de orden 3, demostrar que
$$\langle A, B\rangle = traza\left(AB^t\right)$$
es un producto escalar.

- **Ortogonalización**

7. Sean $\vec{x}_1 = (-2,-2,1), \vec{x}_2 = (0,-1,0)$ y $\vec{x}_3 = (1,-1,0)$ tres vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$. Definimos un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ afirmando que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ son una base ortonormal. Encontrar la expresión analítica de este producto escalar en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

8. Sean $\vec{x}_1 = (1,2,0,0), \vec{x}_2 = (1,0,0,2)$, y $\vec{x}_3 = (1,-1,-1,2)$ tres vectores de $\mathbb{R}^4$. Sea $W = L(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ el subespacio engendrado por $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$.

   a) Encontrar una base ortonormal $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de W usando el método de Gram-Schmidt de ortonormalización.

   b) Extender la base encontrada en (a) a una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$.

9. Sea $\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = x_1y_1 + (x_1+x_2)(y_1+y_2) + (x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3)$ un producto escalar de $\mathbb{R}^3$. Encontrar una base ortogonal en $M \subset \mathbb{R}^3$ si
$$M = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\right\}$$

10. Sean $\vec{x}_1 = (1,2,3,4), \vec{x}_2 = (0,3,-2,1), \vec{x}_3 = (1,1,0,0) \in \mathbb{R}^4$. Encontrar todos los vectores de la forma $\vec{x}_3 + \alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ que sean ortogonales a $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ simultáneamente.

11. Sean $\vec{a} = (1,2,0,-1,0), \vec{b} = (0,1,-1,1,0), \vec{c} = (0,0,1,2,1) \in \mathbb{R}^5$. Descomponer $\vec{c}$ en dos vectores, uno de ellos combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y el otro ortogonal al anterior.

12. Sea E un espacio euclídeo. Demostrar que $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ son ortogonales si y sólo si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

13. Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en un espacio euclídeo, encontrar un tercer vector $\vec{c}$ ortogonal a $\vec{b}$ y tal que $\vec{a}$ se descomponga en la suma de $\vec{c}$ con un vector de la dirección de $\vec{b}$.

14. Encontrar una base ortogonal en el espacio $P_2[x] = \{ax^2 + bx + c, \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}\}$ de los polinomios de grado menor o igual que 2 en el intervalo $[-1, 1]$ donde se ha definido el siguiente producto escalar para todo $p(x), q(x) \in P_2[x]$:
$$\langle p(x) \cdot q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)\, q(t)\, dt$$

15. Construir una base ortonormal para el espacio o subespacio vectorial dado

    a) $H = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 0\}$
    b) H es el espacio de soluciones de

$$\left.\begin{aligned} x - 3y + z &= 0 \\ -2x + 2y - 3z &= 0 \\ 4x - 8y + 5z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

16. Demostrar que si dos matrices P y Q son ortogonales, entonces PQ también es ortogonal.

▪ Proyección Ortogonal

17. Probar que dado un subespacio vectorial W de un espacio euclídeo E, y sea $\vec{x} \in E$. Si $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ con $\vec{y} \in W$, se tiene que

$$\|\vec{z}\| \geq \|P_{W^\perp}(\vec{x})\|$$

18. Encontrar el complemento ortogonal del subespacio W de E cuando:

    a) $E = \mathbb{R}^3$, W es el espacio generado por $\vec{u} = (1, 0, 1)$ y $\vec{v} = (2, -1, 1)$
    b) $E = \mathbb{R}^4$, $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ y } 2x_1 - x_2 = 0\}$

    En ambos se considera el producto escalar usual.

19. En los siguientes apartados se dan un subespacio H y un vector $\vec{v}$, en cada caso encontrar $P_H(\vec{v})$, una base ortonormal para $H^\perp$, y escribir $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ donde $\vec{a} \in H$ y $\vec{b} \in H^\perp$

    a) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x + y = 0\}, \vec{v} = (-1, 2)$
    b) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } 3x - 2y + 6z = 0\}, \vec{v} = (-3, 1, 4)$
    c) $H = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } x = y, w = 3y\}, \vec{v} = (-1, 2, 3, 1)$

20. Sea $\vec{F} = (1, 1, 1)$ el vector de la fuerza que mueve una masa puntual a lo largo de la recta $(x, y, z) = \lambda(0, 1, 2)$. Calcular la proyección de $\vec{F}$ sobre la recta.

21. Hallar la matriz proyección para el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1, 1, 1, 1)$ y $(0, 1, 2, -1)$. Hallar la proyección de los vectores $\vec{u} = (1, -2, 1, 0)$, $\vec{v} = (2, -1, -4, 5)$ y $\vec{w} = (1, 0, 1, 0)$ sobre el subespacio anterior. Interpretar el resultado.

22. En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar cuya matriz respecto a la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

y el subespacio $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x = -z = y\}$.

a) Calcular el ángulo que forman los vectores $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$

b) Encontrar una base de $U^{\perp}$.

c) Encontrar la proyección ortogonal de $(1, -2, 0)$ sobre $U^{\perp}$.

Capítulo 7

Formas Bilineales y Cuadráticas

7.1. Formas bilineales

7.1.1. Definiciones

Definición 36 (Aplicación bilineal) *Dados tres espacios vectoriales U, V y W definidos sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) se dice que la aplicación $f : U \times V \longrightarrow W$ tal que*

$$\forall\, \vec{x} \in U,\ \forall\, \vec{y} \in V,\ \ f\left(\vec{x}, \vec{y}\right) \in W$$

es una aplicación bilineal si f es lineal en ambas variables, es decir

a) $f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = f(\vec{x}_1, \vec{y}) + f(\vec{x}_2, \vec{y})$ *para todo* $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in U$ *y para todo* $\vec{y} \in V$

b) $f(a\vec{x}, \vec{y}) = af(\vec{x}, \vec{y})$ *para todo* $a \in \mathbb{K}$ *y para todo* $\vec{x} \in U$, *y para todo* $\vec{y} \in V$.

c) $f(\vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = f(\vec{x}, \vec{y}_1) + f(\vec{x}, \vec{y}_2)$ *para todo* $\vec{x} \in U$ *y para todo* $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in V$

d) $f(\vec{x}, a\vec{y}) = af(\vec{x}, \vec{y})$ *para todo* $a \in \mathbb{K}$ *y para todo* $\vec{x} \in U$, *y para todo* $\vec{y} \in V$.

Ejemplos:

- $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donde $f\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = \left(x_2 y_1 + 2x_1 y_2, x_1 y_3\right)$
- $M : \mathcal{M}_{n\times m}\left(\mathbb{R}\right) \times \mathcal{M}_{m\times k}\left(\mathbb{R}\right) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times k}\left(\mathbb{R}\right)$ donde $M\left(A, B\right) = A \cdot B$

Definición 37 (Forma bilineal) *Cuando $W = \mathbb{K}$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, la aplicación bilineal se denomina* **forma bilineal.**

$$f : U \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$\forall\, \vec{x} \in U, \forall\, \vec{y} \in V,\ \ f\left(\vec{x}, \vec{y}\right) \in \mathbb{K}$$

Ejemplos:

- Cualquier producto escalar de los que hemos visto es una forma bilineal.
- $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_2y_1 + 2x_1y_2 - x_1y_3)$
- $M : \mathcal{M}_{1\times m}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $M(A, B) = A \cdot B$

Definición 38 *Sea V un espacio vectorial. Una forma bilineal $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice:*

a) *Simétrica: si $f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x})$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in V$.*

b) *Antisimétrica: si $f(\vec{x}, \vec{y}) = -f(\vec{y}, \vec{x})$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in V$.*

Proposición 13 *Toda forma bilineal se puede representar como la suma de una forma bilineal simétrica y una forma bilineal antisimétrica.*

7.1.2. Forma matricial de una forma bilineal

Análogamente a las aplicaciones lineales, las formas bilineales pueden caracterizarse matricialmente. Para ello consideremos una forma bilineal cualquiera $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ una base cualquiera de $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{B}' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, ..., \vec{e}'_m\}$ una base de $\mathbb{R}^m$ de manera que

$$\text{para todo } \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i$$
$$\text{para todo } \vec{y} \in \mathbb{R}^m,\ \vec{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j\vec{e}'_j$$

luego

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\vec{e}'_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_jf\left(\vec{e}_i, \vec{e}'_j\right)$$

ya que f es una forma bilineal, denominemos por $a_{ij} = f\left(\vec{e}_i, \vec{e}'_j\right)$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., m$ así construímos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$$

de manera que

$$f(\vec{x},\vec{y}) = (x_1, x_2, ..., x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2m} \\ & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = (C_{\mathcal{B}}[\vec{x}])^t \cdot A \cdot C_{\mathcal{B}'}[\vec{y}]$$

donde $C_{\mathcal{B}}[\vec{x}]$ son las coordenadas de $\vec{x}$ en la base $\mathcal{B}$ y $C_{\mathcal{B}'}[\vec{y}]$ son las coordenadas de $\vec{y}$ en la base $\mathcal{B}'$.
A la matriz A la denominaremos **matriz de la forma bilineal**.

Ejemplo:

- Consideremos la siguiente forma bilineal

$$f((x,y,z),(u,v)) = u(x+z)$$

la matriz de la forma bilineal en las bases canónicas es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7.1.3. Cambios de base en una forma bilineal

Cualquier matriz A de una forma bilineal $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ estará asociada a unas bases $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^m$, de modo que si tenemos $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$, entonces

$$f(\vec{x},\vec{y}) = (C_{\mathcal{B}_1}[\vec{x}])^t \cdot A \cdot C_{\mathcal{B}_2}[\vec{y}]$$

donde $C_{\mathcal{B}_1}[\vec{x}]$ y $C_{\mathcal{B}_2}[\vec{y}]$ son las coordenadas de $\vec{x}$ y de $\vec{y}$ en las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, respectivamente.

Al igual que hacíamos con las aplicaciones lineales podemos realizar cambios de base de una forma bilineal. De este modo, si consideramos ahora las bases $\mathcal{B}_1'$ de $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{B}_2'$ de $\mathbb{R}^m$, en estas bases tendremos una matriz B asociada a la forma bilineal, de modo que

$$f(\vec{x},\vec{y}) = \left(C_{\mathcal{B}_1'}[\vec{x}]\right)^t \cdot B \cdot C_{\mathcal{B}_2'}[\vec{y}]$$

donde ahora donde $C_{\mathcal{B}_1'}[\vec{x}]$ y $C_{\mathcal{B}_2'}[\vec{y}]$ son las coordenadas de $\vec{x}$ y de $\vec{y}$ en las bases $\mathcal{B}_1'$ y $\mathcal{B}_2'$. Teniendo en cuenta que, usando las correspondientes matrices de cambio de base, podemos escribir $C_{\mathcal{B}_1'}[\vec{x}] = M_{\mathcal{B}_1'}^{\mathcal{B}_1} C_{\mathcal{B}_1}[\vec{x}]$ y $C_{\mathcal{B}_2'}[\vec{y}] = M_{\mathcal{B}_2'}^{\mathcal{B}_2} C_{\mathcal{B}_2}[\vec{y}]$ tendremos que

$$\left(C_{\mathcal{B}_1'}[\vec{x}]\right)^t B\, C_{\mathcal{B}_2'}[\vec{y}] = (C_{\mathcal{B}_1}[\vec{x}])^t A\, C_{\mathcal{B}_2}[\vec{y}] \Rightarrow$$

$$\left(M_{\mathcal{B}_1'}^{\mathcal{B}_1} C_{\mathcal{B}_1}[\vec{x}]\right)^t B\, M_{\mathcal{B}_2'}^{\mathcal{B}_2} C_{\mathcal{B}_2}[\vec{y}] = (C_{\mathcal{B}_1}[\vec{x}])^t \left(M_{\mathcal{B}_1'}^{\mathcal{B}_1}\right)^t B\, M_{\mathcal{B}_2'}^{\mathcal{B}_2} C_{\mathcal{B}_2}[\vec{y}] = (C_{\mathcal{B}_1}[\vec{x}])^t A\, C_{\mathcal{B}_2}[\vec{y}] \Rightarrow$$

$$A = \left(M_{\mathcal{B}_1'}^{\mathcal{B}_1}\right)^t B\, M_{\mathcal{B}_2'}^{\mathcal{B}_2}$$

7.2. Forma cuadráticas

7.2.1. Definición

Definición 39 *Sea una forma bilineal simétrica $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$. Se llama forma cuadrática asociada a dicha forma bilineal simétrica, a la aplicación $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $\vec{x} \in V,\ Q(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x})$*

Ejemplo:

- $Q(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$
- $Q(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^3 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3$

Dada una base de V en un espacio vectorial de dimensión n, $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$, la forma cuadrática puede expresarse como:

$$Q(\vec{x}) = (x_1, x_2, ..., x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{x}^t A \vec{x}$$

donde A es una matriz simétrica asociada a la forma cuadrática Q en la base $\mathcal{B}$, y por consiguiente

$$a_{ij} = f(\vec{e}_i, \vec{e}_j) \text{ para todo } i, j = 1, 2, ..., n$$

A la expresión anterior la llamaremos expresión matricial de la forma cuadrática Q con respecto a la base $\mathcal{B}$. Desarrollando la expresión obtenemos la expresión polinómica de la forma cuadrática respecto a la base $\mathcal{B}$ que resulta ser un polinomio homogéneo de segundo grado con n variables:

$$Q(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}x_k^2 + \sum_{i \neq j} 2a_{ij}x_ix_j$$

Para pasar de una expresión a otra hay que tener en cuenta que los elementos de la diagonal principal en la expresión matricial resultan ser los coeficientes de los cuadrados en la expresión polinómica, y que los elementos restantes de la matriz resultan ser la mitad de los coeficientes de los términos no cuadráticos en la expresión polinómica.

Ejemplos:

- Obtener la expresión polinómica de la forma cuadrática:

$$Q(\vec{x}) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

- Obtener la expresión matricial de la forma cuadrática:

$$Q(\vec{x}) = x_2^2 - 5x_3^2 - x_1x_2 + 4x_2x_3$$

7.2.2. Forma canónica de una forma cuadrática

Sabemos que la expresión matricial de una forma cuadrática Q respecto de una base $\mathcal{B}$ vendrá dada por $Q(\vec{x}) = (C_{\mathcal{B}}[\vec{x}])^t\, A\, C_{\mathcal{B}}[\vec{x}]$, donde A es una matriz simétrica, pero una matriz simétrica es siempre diagonalizable, por tanto existirá una base del espacio vectorial V formada por autovectores del endomorfismo asociado a la matriz A en $\mathcal{B}$, respecto de la cual la matriz de dicho endomorfismo será una matriz diagonal D formada por los autovalores de A. Pero además, por ser A simétrica, los subespacios propios del endomorfismo serán ortogonales dos a dos, y por tanto, ortonormalizando cada uno de ellos es posible obtener una base ortonormal de autovectores de A, a la que llamaremos $\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$.

Sea P la matriz de paso de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, (que será ortogonal por ser $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}$ ortogonales) de manera que:

$$D = P^{-1}AP$$

pero además se cumple que si P es una matriz ortogonal entonces $P^{-1} = P^t$

Aplicando la propiedad anterior tenemos entonces que:

$$D = P^tAP$$

Además sabemos que si tenemos la matriz A de una forma cuadrática en una base $\mathcal{B}$ y queremos obtener la matriz B de dicha forma cuadrática en una base $\mathcal{B}'$, tendremos que $B = P^tAP$ donde P es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, según hemos visto en la sección anterior. Por lo tanto, si $\mathcal{B}'$ es la base ortonormal en la cual la matriz A es diagonal, tendremos que la matriz de la forma cuadrática en la base $\mathcal{B}'$ será diagonal.

De este modo hemos probado que toda forma cuadrática puede expresarse de la forma

$$Q(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k^2$$

a esta expresión la llamaremos **forma canónica** de la forma cuadrática Q, donde ahora $\vec{x}$ está expresado en la base $\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$, es decir, $\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} z_k \vec{u}_k$.

Ejemplo:

- Encontrar la forma canónica de la siguiente forma cuadrática

$$Q(\vec{x}) = 3x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$$

y las ecuaciones del cambio de base necesario.

La matriz de la forma cuadrática en la base canónica será

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de esta matriz son $\lambda_1 = -1$ doble y $\lambda_2 = 8$ simple. Por lo tanto la matriz de la forma canónica será

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Como los autovectores ortonormales asociados a dichos autovalores son $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$ y $\vec{u}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1, -4, 1)$ asociados a $\lambda_1 = -1$ y $\vec{u}_3 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)$ asociado a $\lambda_2 = 8$ La matriz ortogonal de cambio de base será

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Teorema 12 (Método de Jacobi) *Consideremos la expresión matricial de una forma cuadrática $Q(\vec{x})$*

$$Q(\vec{x}) = (x_1, x_2, ..., x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

donde la matriz A verifica:

$$A_1 = a_{11} \neq 0; \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0; ...$$

$$A_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix} \neq 0; \quad |A| \neq 0$$

Entonces existe otra base respecto de la cual Q se expresa canónicamente como:

$$Q(\vec{x}) = A_1 z_1^2 + \frac{A_2}{A_1} z_2^2 + \cdots + \frac{|A|}{A_{n-1}} z_n^2$$

Ejemplo:

- Encontrar la forma canónica de Jacobi del ejemplo anterior.

  En el ejemplo anterior teníamos la matriz de la forma cuadrática $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

  Tendremos que:

  $$A_1 = 3; \ A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4; \ A_3 = |A| = 8$$

  Por lo tanto, $Q(\vec{x}) = 3z_1^2 + \frac{-4}{3} z_2^2 + \frac{8}{-4} z_3^2 = 3z_1^2 - \frac{4}{3} z_2^2 - 2z_3^2$

Teorema 13 (Ley de Inercia de las formas cuadráticas) *Sea $Q(\vec{x})$ una forma cuadrática en un espacio vectorial euclídeo V. Si $Q(\vec{x})$ se escribe de la forma*

$$Q(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k^2 \tag{7.1}$$

en la base $\mathcal{B}_u = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$, con $\lambda_k \in \mathbb{R}$ y $\lambda_k \neq 0$,k=1,2,...,p, y también se escribe de la forma

$$Q(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{q} \alpha_k x_k^2 \tag{7.2}$$

en la base $\mathcal{B}_v = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$, con $\alpha_k \in \mathbb{R}$ y $\alpha_k \neq 0$, $k = 1, 2, ..., q$, se tiene que $p = q = rang(A)$, donde A es la matriz asociada a la forma cuadrática en la base canónica, y el número de coeficientes positivos y negativos de (1) y (2) coinciden.

El número de términos que aparecen en la forma canónica de una forma cuadrática $Q(\vec{x})$ recibe el nombre de **índice de inercia** de la forma cuadrática, el número de términos positivos se llama **índice de inercia positivo** de la forma cuadrática y el número de términos positivos se llama **índice de inercia negativo** de la forma cuadrática.

7.3. Clasificación de formas cuadráticas

7.3.1. Definiciones

Veremos cómo se pueden analizar el signo que toma una forma cuadrática real examinando una de sus matrices asociadas. Para ello comenzamos con las siguientes definiciones:

Definición 40 *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ se dice que:*

a) *A es* **definida positiva***, si y sólo si $\vec{x}^t A\vec{x} > 0$, para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq 0$*

b) *A es* **definida negativa***, si y sólo si $\vec{x}^t A\vec{x} < 0$, para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq 0$*

c) *A es* **semidefinida positiva***, si y sólo si $\vec{x}^t A\vec{x} \geq 0$, para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq 0$ y existe un $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq 0$ tal que $\vec{x}^t A\vec{x} = 0$.*

d) *A es* **semidefinida negativa***, si y sólo si $\vec{x}^t A\vec{x} \leq 0$, para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq 0$ y existe un $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq 0$ tal que $\vec{x}^t A\vec{x} = 0$.*

e) *A es* **no definida** *o* **indefinida** *si no se verifica ninguna de las condiciones anteriores*

De este modo, surge de manera natural la correspondiente clasificación de las formas cuadráticas que recogemos, análogamente, en la siguiente clasificación:

Definición 41 *Se dice que una forma cuadrática real $Q(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es:*

a) **definida positiva***, si y sólo si $Q(\vec{x}) > 0$, para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq 0$*

b) **definida negativa***, si y sólo si $Q(\vec{x}) < 0$, para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq 0$*

c) **semidefinida positiva***, si y sólo si $Q(\vec{x}) \geq 0$, para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq 0$ y existe un $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq 0$ tal que $Q(\vec{x}) = 0$.*

d) **semidefinida negativa***, si y sólo si $Q(\vec{x}) \leq 0$, para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq 0$ y existe un $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq 0$ tal que $Q(\vec{x}) = 0$.*

e) **no definida** *o* **indefinida** *si no se verifica ninguna de las condiciones anteriores.*

7.3.2. Clasificación

- **Criterio de los autovalores:**

  Sea $Q(\vec{x}) = \vec{x}^t A\vec{x}$ la expresión matricial de una forma cuadrática Q. Se tiene:

  a) **definida positiva**, si y sólo si todos los autovalores de A son estrictamente positivos.

  b) **definida negativa**, si y sólo si todos los autovalores de A son estrictamente negativos.

  c) **semidefinida positiva**, si y sólo si todos los autovalores de A son positivos o nulos

  d) **semidefinida negativa**, si y sólo si todos los autovalores de A son negativos o nulos

  e) **no definida** o **indefinida** si y sólo si A posee autovalores positivos o negativos.

- **Criterio de los menores principales o de Sylvester:**

  Sea $Q(\vec{x}) = \vec{x}^t A\vec{x}$ la expresión matricial de una forma cuadrática Q y sean:

$$A_1 = a_{11};\; A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};\; ...;\; A_n = |A|$$

  los menores principales de la matriz A. Se tiene:

  a) $Q(\vec{x})$ es **definida positiva**, si y sólo $A_1 > 0, A_2 > 0, ..., A_n > 0$.

  b) $Q(\vec{x})$ es **definida negativa**, si y sólo $(-1)^i A_i > 0$ para todo $i = 1, 2, ..., n$

  c) $Q(\vec{x})$ es **indefinida** si $A_i \neq 0$ para todo $i = 1, 2, ..., n$ y son falsos (a) y (b).

La teoría de formas cuadráticas es de gran ayuda a la hora de calcular los puntos críticos de funciones de varias variables. Supongamos que $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ representa una hipersuperficie de $\mathbb{R}^n$. Recordad que para calcular los puntos críticos de la función f primero calculamos su gradiente y buscamos todos aquellos puntos que anulan el gradiente:

$$\nabla f(x_1, x_2, ..., x_n) = \vec{0}$$

Una vez realizado esto tenemos que clasificar los puntos. Para ello calcularemos la matriz hessiana que, como recordareis, es simétrica, y estudiamos el signo de la matriz hessiana en cada uno de los puntos críticos. Si es definida postiva tendremos un mínimo y si es definida negativa un máximo.

EJERCICIOS

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación dada por

$$f(x, y) = 3x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$$

   Calcular:

   a) Demostrar que f es bilineal, ¿es simétrica?

   b) Hallar la matriz A de f respecto de la base canónica.

   c) Hallar la matriz B de f respecto de la base $\mathcal{B} = \{(2, 1), (1, -1)\}$.

   d) Hallar la matriz P tal que $B = P^tAP$.

2. Sea f una forma bilineal sobre V y h un endomorfismo de V. Demostrar que la aplicación $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = f(h(x), h(y))$ es una forma bilineal sobre V.

3. En $\mathbb{R}^4$ se considera el endomorfismo $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ que respecto de las bases canónicas

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Se define la siguiente aplicación $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(u, v) = u \cdot g(v)$, donde u y v son vectores de $\mathbb{R}^4$ y el producto $\cdot$ es el producto escalar euclídeo de $\mathbb{R}^4$.

   a) Prueba que f es una aplicación bilineal simétrica.

   b) Calcula la matriz asociada a f respecto a la base canónica.

   c) Halla una base ortogonal para f

4. Encontrar la matriz de las siguientes formas cuadráticas en $\mathbb{R}^n$ dadas con respecto a la base canónica:

   a) $Q(\vec{x}) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 + 6x_1x_3,\ n = 3$

   b) $Q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{3} (x_i - s)^2,\ s = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3),\ n = 3$

   c) $Q(\vec{x}) = \sum_{i<j}^{n} (i - j)^2 x_i x_j$

5. Sea $A(\vec{x},\vec{y})$ una forma bilineal que tiene la expresión:

$$A(\vec{x},\vec{y}) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_3$$

con respecto a la base $\vec{u}_1 = (1,0,1), \vec{u}_2 = (0,1,0), \vec{u}_3 = (0,1,-1)$ en $\mathbb{R}^3$, donde $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$, $\vec{y} = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + y_3\vec{u}_3$.

   a) Encontrar la expresión de $A(\vec{x},\vec{y})$ con respecto a la base canónica.

   b) Encontrar una forma bilineal simétrica B y una forma bilineal antisimétrica C tal que $A = B + C$, dando las expresiones de B y C con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

6. Encontrar la forma canónica de las siguientes formas cuadráticas:

   a) $3x^2 + 2y^2 + z^2 - 6xy + 4xz$

   b) $xy + 2xz$

   c) $9x^2 - 3y^2 + 6xy + 18xz + 12yz$

7. Sea $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$, y sea f una forma bilineal simétrica tal que

$$\begin{aligned} f(\vec{u}_1,\vec{u}_1) &= 1 \\ f(\vec{u}_1,\vec{u}_2) &= 1 \\ f(\vec{u}_2,\vec{u}_2) &= 0 \end{aligned}$$

   Calcular:

   a) La expresión matricial de la forma cuadrática Q asociada a f en la base $\mathcal{B}$.

   b) Encontrar la expresión matricial de la forma cuadrática Q en la nueva base $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, donde:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \\ \vec{v}_2 &= \vec{u}_1 - \vec{u}_2 \end{aligned}$$

8. Encontrar una transformación ortogonal que lleve la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ dada por:

$$Q(\vec{x}) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$$

   a una forma canónica e indicar esta forma canónica. Dar también la forma canónica de Jacobi.

9. Encontrar la forma canónica de Jacobi de la forma cuadrática siguiente

$$Q(\vec{x}) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

   e indicar también los índices de inercia.

10. Encontrar los valores de α para los cuales la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ dada por:

$$x^2 + 4y^2 + 2\alpha xy + 2\alpha yz$$

   es definida positiva.

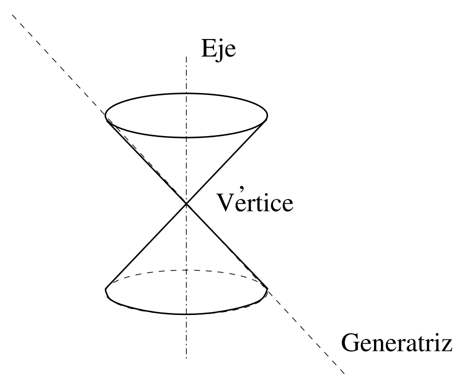
11. Determinar la región tridimensional en la cual la matriz de las derivadas parciales segundas de la función $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + y^2 z^2$ determina una forma cuadrática definida positiva.

Capítulo 8

Cónicas

8.1. Definiciones

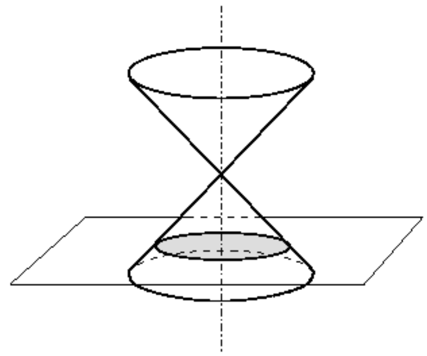
Un doble cono recto es la figura que surge al girar una recta g alrededor de otra recta h que la corta.



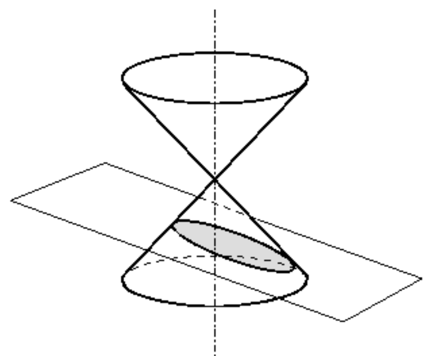
La recta h se denomina **eje del cono** y las distintas posiciones de g, **generatrices del cono**; el punto de intersección del eje con una generatriz cualquiera del cono se denomina **vértice**.

Toda figura plana que se obtiene como intersección de un doble cono recto con un plano que le corta se denomina una **sección cónica**. Según la posición del plano de corte, las secciones cónicas recibirán nombres diferentes:

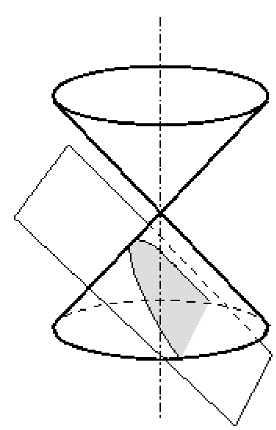
a) Si el plano es perpendicular al eje del cono, y no pasa por el vértice, la cónica es una **circunferencia**. En el caso especial de que el plano pase por el vértice se obtiene un punto.



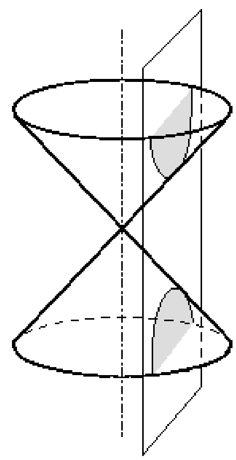
b) Si el plano no es perpendicular al eje del cono y forma con dicho eje un ángulo superior al ángulo que forman el eje del cono y una cualquiera de las generatrices, la cónica resultante se denomina **elipse**, en el caso en el que el plano pasa por el vértice obtendremos un punto.



c) Si el plano es paralelo a una cualquiera de las generatrices la cónica se denomina **parábola**, excepto si el plano pasa por el vértice, en cuyo caso se obtiene una recta.



d) Si el ángulo que forman el plano y el eje de giro es inferior al ángulo que forman el eje y una generatriz cualquiera, la cónica se denomina **hipérbola**, salvo el caso en que el plano pase por el vértice, en cuyo caso se obtienen dos rectas que se cortan.



En los casos en los que se obtiene un punto, una recta, o pares de rectas diremos que son cónicas **degeneradas**.

8.2. La circunferencia y sus propiedades

8.2.1. Definición

Una circunferencia se define como el lugar geométrico de los puntos P del plano π que satisfacen que su distancia a un punto fijo C, llamado **centro**, es constante. Esta constante r se denomina **radio** de la circunferencia.

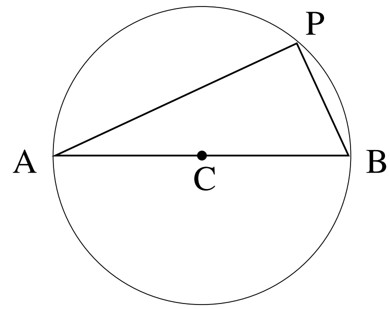
$$\left\|\overrightarrow{CP}\right\| = r$$

Si $C(c_1, c_2)$ y $P(x, y)$ tendremos que

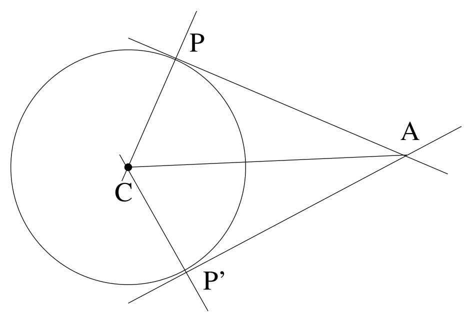
$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$$

8.2.2. Propiedades

1. Sean A y B dos puntos de un plano. Un punto P del plano pertenece a la circunferencia en la que A y B son diametralmente opuestos si y sólo si los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{BP}$ son perpendiculares.



2. Consideremos una circunferencia de centro C y un punto A exterior a ella. Si P y P' son los puntos de la intersección de las tangentes a la circunferencia que pasan por A se tiene que $\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \left\|\overrightarrow{AP'}\right\|$. Además $\overrightarrow{CP}$ es perpendicular a $\overrightarrow{AP}$.



8.3. La elipse y la hipérbola

8.3.1. Elipse: definición y elementos

Definición: Una elipse es el lugar geométrico de los puntos A de un plano π cuya suma de las distancias de A a dos puntos fijos y distintos, llamados focos, F_1 y F_2, es constante:

$$\left\|\overrightarrow{AF_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{AF_2}\right\| = \text{constante}$$

Elementos de una elipse: En una elipse, además de los **focos** F_1 y F_2, podemos definir los siguientes elementos:

1. Si dibujamos la elipse en un sistema de coordenadas cartesianas, el eje que contiene a los focos se denomina **eje principal** y al eje perpendicular que pasa por el punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$ se le denomina **eje secundario**.

2. El punto medio C entre los focos es el **centro** de la elipse.

3. La distancia c entre el centro de la elipse y uno de los focos se denomina **semidistancia focal**.

4. La distancia a entre el centro de la elipse y uno de los puntos de corte de la elipse con la recta que contiene a los focos se denomina **semieje principal**.

5. La distancia b entre el centro de la elipse y uno de los puntos de corte de la elipse con la recta que pasa por el centro y es perpendicular a la que contiene a los focos se denomina **semieje secundario**.

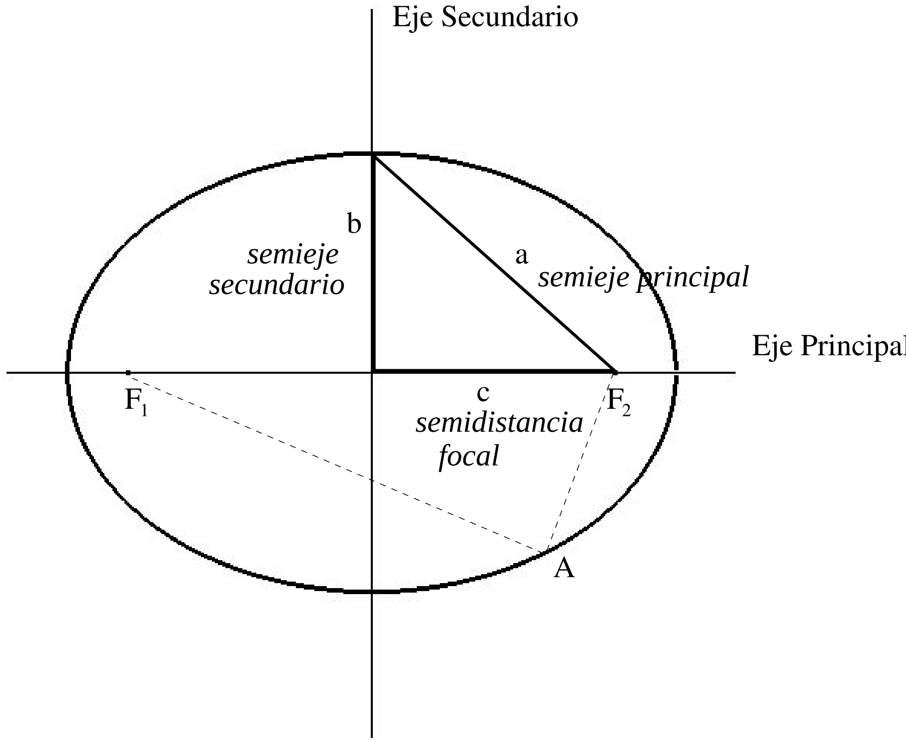
6. El cociente $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ entre la distancia focal y el semieje principal se denomina **excentricidad** de la elipse. Como $a > c$ se tiene que $0 < \varepsilon < 1$.

A través del teorema de Pitágoras se da la siguiente relación:

$$\begin{aligned} &a^2 = b^2 + c^2 \\ &b = \sqrt{a^2 - c^2} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \end{aligned}$$

Para todo punto A perteneciente a la elipse se tiene que $\left\|\overrightarrow{AF_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{AF_2}\right\| = 2a$. Si las coordenadas de los focos son $F_1(f_{11}, f_{12})$ y $F_2(f_{21}, f_{22})$ tendremos que

$$\sqrt{(x - f_{11})^2 + (y - f_{12})^2} + \sqrt{(x - f_{21})^2 + (y - f_{22})^2} = 2a$$



8.3.2. Hipérbola: definición y elementos

Definición: Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos A de un plano π cuya diferencia de distancias de A a dos puntos fijos y distintos, llamados **focos**, F_1 y F_2, es constante:

$$\left| \left\| \overrightarrow{AF_1} \right\| - \left\| \overrightarrow{AF_2} \right\| \right| = \text{constante}$$

.

Elementos de una hipérbola: Para una hipérbola la definición de **eje principal** y **secundario** es la misma que para la elipse. De igual manera definimos el **centro** C de la hipérbola y el **semieje principal**, a. Igualmente podemos definir la **semidistancia focal** c.

Sin embargo, en una hipérbola siempre se tiene que $c > a$ de manera que la excentricidad ε es siempre mayor que 1, $\varepsilon > 1$.

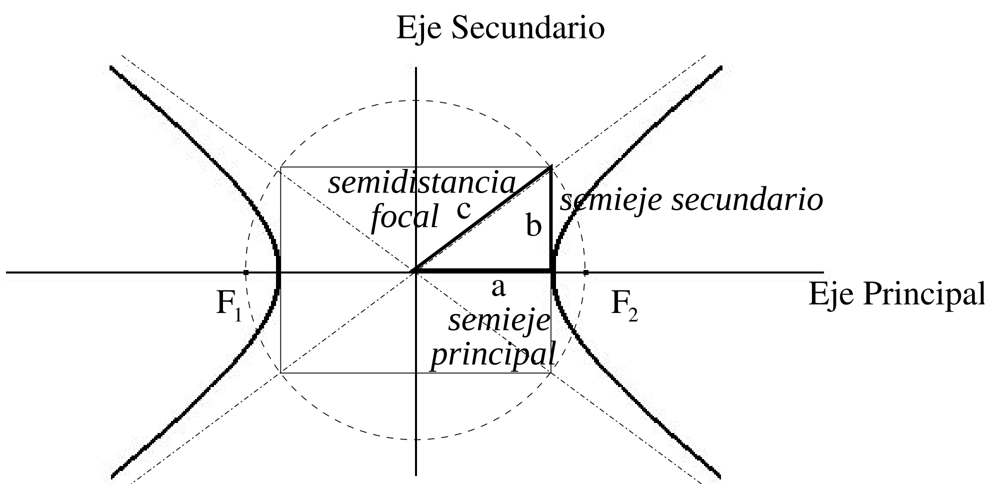
De nuevo a través del teorema de Pitágoras definimos el **semieje secundario** b como:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

Este parámetro b está relacionado con las asíntotas a cada una de las ramas de la hipérbola. La tangente del ángulo que forma las **asíntotas** con el eje principal es $\tan\alpha = \frac{b}{a}$.

Para todo punto A perteneciente a la hipérbola se tiene que $\left|\left\|\overrightarrow{AF_1}\right\| - \left\|\overrightarrow{AF_2}\right\|\right| = 2a$. Si las coordenadas de los focos son $F_1(f_{11}, f_{12})$ y $F_2(f_{21}, f_{22})$ tendremos que

$$\left|\sqrt{(x-f_{11})^2+(y-f_{12})^2}-\sqrt{(x-f_{21})^2+(y-f_{22})^2}\right| = 2a$$



8.4. Parábola

8.4.1. Definición

La parábola se define como el lugar geométrico de los puntos A del plano π que equidistan de un punto fijo llamado **foco** F y una recta fija d llamada **directriz**:

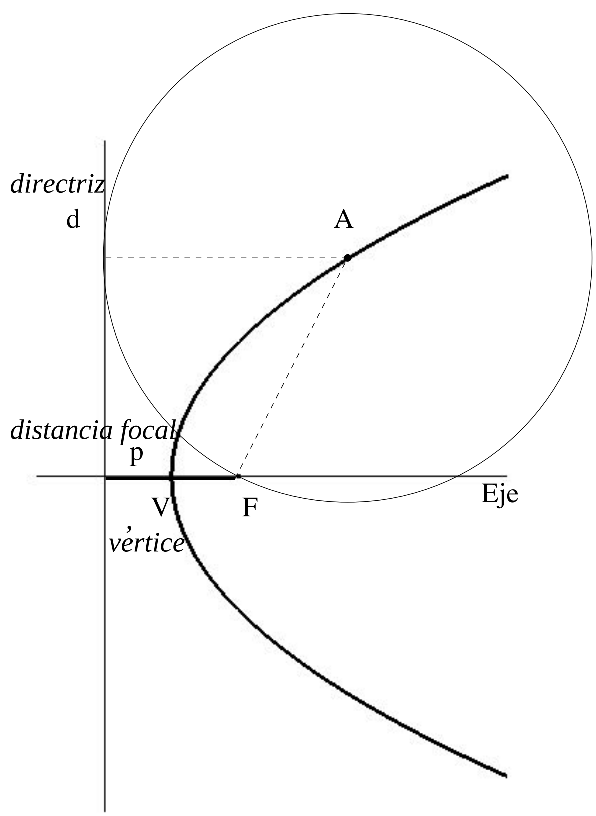
$$\left\| \overrightarrow{AF} \right\| = dist(d, A)$$

8.4.2. Elementos de una parábola

En una parábola, además del foco y la directriz, podemos definir el **eje** de la parábola como la recta perpendicular a la directriz y que pasa por el foco.

Igualmente, podemos definir el **vértice** de la parábola como el punto de corte entre la parábola y el eje. Dicho vértice es equidistante del foco y la directriz.

La distancia p entre el foco y la directriz se denomina **distancia focal**.



8.5. Nueva definición de cónicas

8.5.1. Definición general de una cónica

Dada una cónica no degenerada existe siempre un punto F, llamado **foco**, una recta d, llamada directriz (ambos en el plano de la cónica) y un número $\varepsilon > 0$ tal que todo punto P de la cónica satisface que:

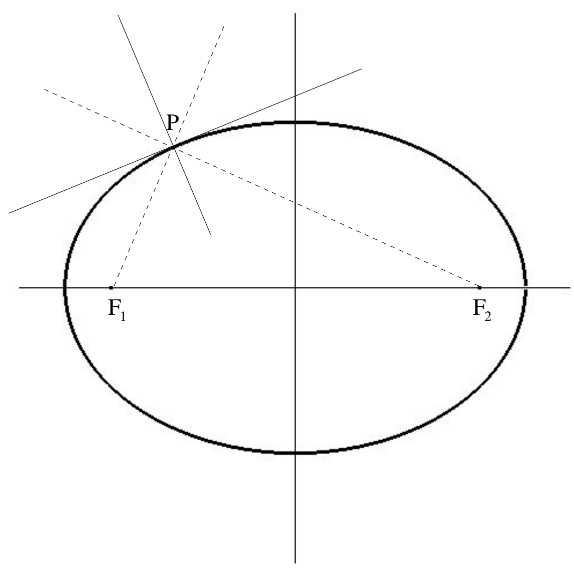
$$\left\| \overrightarrow{PF} \right\| = \varepsilon \; dist\,(P, d)$$

Si $\varepsilon < 1$ se tiene una elipse, si $\varepsilon > 1$ se tiene una hipérbola y si $\varepsilon = 1$ se tiene una parábola.

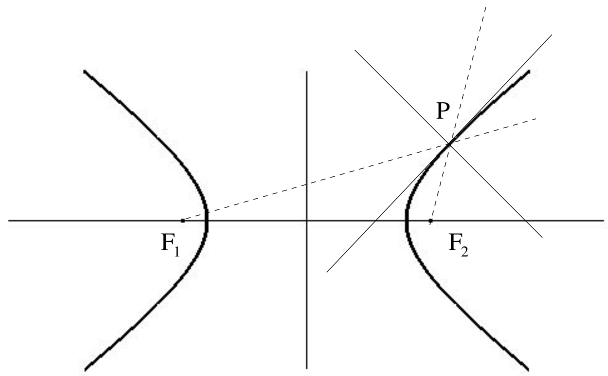
A continuación veamos algunas propiedades de las elipses, de las hipérbolas y de las parábolas.

8.5.2. Propiedades

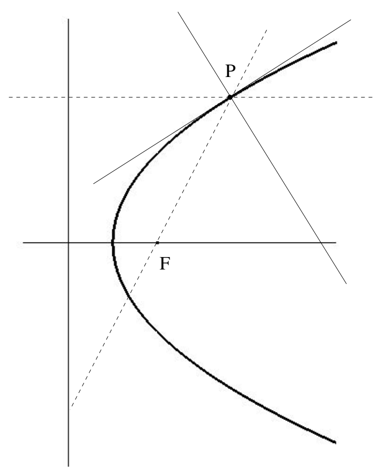
- La tangente y la normal a una elipse en un punto P de ella misma son las bisectrices de las rectas que unen el punto P con los focos.



- La tangente y la normal a una hipérbola en un punto P de ella misma son las bisectrices de las rectas que unen el punto P con los focos.



- La tangente y la normal a una parábola en un punto P de ella misma son las bisectrices de la normal a la directriz por P y la recta que une el punto P con el foco.



8.6. Ecuación de una cónica en un sistema de coordenadas cartesiano

Ecuación de una circunferencia de centro $C\,(c_1, c_2)$ y radio r:

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$$

Ecuación de una elipse de focos $F_1\left(f_{11}, f_{12}\right)$ y $F_2\left(f_{21}, f_{22}\right)$:

$$\sqrt{\left(x-f_{11}\right)^2+\left(y-f_{12}\right)^2}+\sqrt{\left(x-f_{21}\right)^2+\left(y-f_{22}\right)^2}=2a$$

En el caso particular de que el eje principal y secundario de la elipse sean los ejes coordenados horizontal y vertical, respectivamente, el centro de la elipse está en el origen y, por tanto, los focos serían los puntos $F_1\left(-c, 0\right)$ y $F_2\left(c, 0\right)$. En este caso tenemos que

$$\sqrt{\left(x-c\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}=2a$$

pasando un miembro de la izquierda a la derecha y elevando ambas partes de la igualdad al cuadrado obtenemos:

$$x^2-2xc+c^2+y^2=4a^2-4\sqrt{(x^2+2xc+c^2+y^2)}a+x^2+2xc+c^2+y^2$$

Simplificando llegamos a la expresión:

$$a\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}=xc+a^2$$

Elevando de nuevo al cuadrado:

$$\begin{aligned}
a^2\left(x^2+2xc+c^2+y^2\right) &= x^2c^2+a^4+2xca^2\\
a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2 &= x^2c^2+a^4\\
\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2 &= a^2\left(a^2-c^2\right)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que en la elipse se da la relación $b^2=a^2-c^2$ obtenemos:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

que podemos reescribir de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

En el caso de que la elipse tenga centro $C\left(c_1, c_2\right)$ y ejes paralelos a los ejes coordenados su ecuación es:

$$\frac{\left(x-c_1\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y-c_2\right)^2}{b^2}=1$$

Ecuación de una hipérbola de focos $F_1(f_{11}, f_{12})$ y $F_2(f_{21}, f_{22})$:

$$\sqrt{(x-f_{11})^2+(y-f_{12})^2}-\sqrt{(x-f_{21})^2+(y-f_{22})^2}=\pm 2a$$

En el caso particular de que el eje principal y secundario de la elipse sean los ejes coordenados horizontal y vertical, respectivamente, el centro se encuentre en el origen y los focos son los puntos $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$. En este caso tenemos que

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a$$

pasando un miembro de la izquierda a la derecha y elevando ambas partes de la igualdad al cuadrado obtenemos:

$$x^2-2xc+c^2+y^2=4a^2\pm 4\sqrt{(x^2+2xc+c^2+y^2)}a+x^2+2xc+c^2+y^2$$

Simplificando llegamos a la expresión:

$$\mp a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=xc+a^2$$

Elevando de nuevo al cuadrado:

$$\begin{aligned} a^2\left(x^2+2xc+c^2+y^2\right) &= x^2c^2+a^4+2xca^2 \\ a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2 &= x^2c^2+a^4 \\ \left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2 &= a^2\left(a^2-c^2\right) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que en la hipérbola se da la relación $b^2=c^2-a^2$ obtenemos:

$$-b^2x^2+a^2y^2=-a^2b^2$$

que podemos reescribir de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Las rectas que pasan por el origen y tienen (a,b) y $(a,-b)$ como vectores directores son las asíntotas de la hipérbola.

En el caso de que la hipérbola tenga centro $C(c_1,c_2)$ y ejes principal y secundario paralelos a los ejes coordenados horizontal y vertical, respectivamente, su ecuación es:

$$\frac{(x-c_1)^2}{a^2}-\frac{(y-c_2)^2}{b^2}=1$$

Si los ejes principal y secundario son paralelos a los ejes coordenados vertical y horizontal, respectivamente, tendremos que la ecuación de la hipérbola es:

$$-\frac{(x-c_1)^2}{b^2}+\frac{(y-c_2)^2}{a^2}=1$$

Ecuación de una parábola: Si la directriz es $d: x=-\frac{p}{2}$ y el foco es el punto $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, esto es, una parábola con vértice en el origen y eje en el eje coordenado horizontal abierta hacia la derecha:

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{PF}\right\| &= dist\,(P,d)\\ \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2} &= x+\frac{p}{2}\end{aligned}$$

Elevando al cuadrado y simplificando:

$$y^2=2px$$

Si el vértice se encuentra en un punto $V(c_1,c_2)$ y es una parábola con eje paralelo al eje horizontal y abierta hacia la derecha tendremos que su ecuación es:

$$(y-c_2)^2=2p(x-c_1)$$

mientras que si la parábola es abierta hacia la izquierda tendremos

$$(y-c_2)^2=-2p(x-c_1)$$

Por otro lado, si el eje es paralelo al eje vertical y es una parábola abierta hacia arriba tendremos la ecuación:

$$(x-c_1)^2=2p(y-c_2)$$

mientras que si la parábola es abierta hacia abajo tendremos

$$(x-c_1)^2=-2p(y-c_2)$$

8.7. Determinación de las cónicas

Hemos visto una cónica no degenerada es el lugar geométrico de los puntos P que satisfacen $\left\|\overrightarrow{PF}\right\|=\varepsilon\, dist\,(P,d)$ donde F es el foco y d la directriz. Si tomamos $F\,(c_1,c_2)$ y $d: ax+by+c=$

0, tenemos entonces que la igualdad $\left\|\overrightarrow{PF}\right\| = \varepsilon \; dist\,(P,d)$ se transforma en:

$$\sqrt{(x-c_1)^2+(y-c_2)^2} = \varepsilon\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

donde $P\,(x,y)$. Simplificando y agrupando términos obtenemos la ecuación general de la cónica:

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$

donde

$$\begin{array}{rcl} A & = & a^2+b^2-\varepsilon^2a^2 \\ B & = & a^2+b^2-\varepsilon^2b^2 \\ C & = & -2\varepsilon^2ab \\ D & = & -2c_1\left(a^2+b^2\right)-2\varepsilon^2ac \\ E & = & -2c_2\left(a^2+b^2\right)-2\varepsilon^2bc \\ F & = & \left(a^2+b^2\right)\left(c_1^2+c_2^2\right)-\varepsilon^2c^2 \end{array}$$

Los términos Ax^2+By^2+Cxy se denominan **parte principal** de la cónica y puede escribirse del modo

$$(x \;\; y)\begin{pmatrix} A & C/2 \\ C/2 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Tenemos que la matriz $A_p = \begin{pmatrix} A & C/2 \\ C/2 & B \end{pmatrix}$ es simétrica y por tanto podrá diagonalizarse mediante un cambio de base ortonormal y sus autovalores λ_1 y λ_2 son reales. Sea Q la matriz del cambio de base, de manera que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

y como Q es ortonormal tenemos que $Q^t = Q^{-1}$ tenemos que:

$$(x \;\; y)\begin{pmatrix} A & C/2 \\ C/2 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x_1 \;\; y_1)\,Q^{-1}\begin{pmatrix} A & C/2 \\ C/2 & B \end{pmatrix}Q\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \lambda_1x_1^2+\lambda_2y_1^2$$

De este modo logramos eliminar el término xy de la ecuación general de la cónica mediante un giro de los ejes coordenados. La ecuación se transforma en:

$$\lambda_1x_1^2+\lambda_2y_1^2+b_1x_1+b_2y_1+b=0 \tag{8.1}$$

8.7.1. Casos que pueden presentarse

Consideramos $|A_p| = \begin{vmatrix} A & C/2 \\ C/2 & B \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2$.

- $|A_p| = \lambda_1\lambda_2 > 0$

En este caso los autovalores tienen el mismo signo y siempre podremos tomarlos positivos, y tomar $\lambda_1 \leq \lambda_2$, en este caso completando cuadrados la ecuación (8.1) puede escribirse de la forma:

$$\lambda_1\left(x_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2 - \frac{b_1^2}{4\lambda_1} - \frac{b_2^2}{4\lambda_2} + b = 0$$

realizando la translación:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} \\ y_2 &= y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \end{aligned}$$

se transforma en la cónica:

$$\frac{x_2^2}{1/\lambda_1} + \frac{y_2^2}{1/\lambda_2} = c$$

que es la ecuación de una elipse donde $c = \dfrac{b_1^2}{4\lambda_1} + \dfrac{b_2^2}{4\lambda_2} - b$. Como siempre podemos tomar $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$ entonces la ecuación anterior es una elipse con los focos en el eje $\overline{Ox_2}$ si $c > 0$.

Si $c = 0$ se obtiene un punto y si $c < 0$ no se obtiene nada puesto que la igualdad anterior es imposible. En este caso la cónica es de *tipo elíptico.*

- $|A_p| = \lambda_1\lambda_2 < 0$

En este caso los autovalores λ_1 y λ_2 tienen distinto signo y por tanto siempre podemos tomar $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$. Al igual que en el caso anterior podemos obtener mediante un cambio de ejes coordenados y una traslación una expresión de la forma:

$$\frac{x_2^2}{1/\lambda_1} + \frac{y_2^2}{1/\lambda_2} = c$$

Si $c \neq 0$ se tiene una hipérbola, si $c = 0$ se tiene:

$$y_2 = \pm\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}x_2^2}$$

que representa un par de rectas de pendiente $\pm\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$. En este caso la cónica es de *tipo hiperbólico.*

- $|A_p| = \lambda_1\lambda_2 = 0$

En este caso uno de los autovalores es cero (**importante**, los dos autovalores no pueden ser nulos a la vez, ya que en ese caso A_p sería la matriz nula), podemos tomar $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$. Mediante un giro de ejes coordenados obtenemos:

$$\lambda_2 y_1^2 + b_1 x_1 + b_2 y_1 + b = 0 \tag{8.2}$$

Si $b_1 \neq 0$ entonces podemos poner:

$$\lambda_2\left(y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2 + b_1\left(x_1 - \frac{b_2^2}{4\lambda_2 b_1} + \frac{b}{b_1}\right) = 0$$

y realizando la translación:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{b_2^2}{4\lambda_2 b_1} + \frac{b}{b_1} \\ y_2 &= y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \end{aligned}$$

tenemos:

$$y_2^2 = -\frac{b_1}{\lambda_2} x_2$$

que representa una parábola con el foco en la dirección de x_2.

Si $b_1 = 0$ tenemos entonces que (8.2) adopta la forma:

$$\begin{aligned} \lambda_2 y_1^2 + b_2 y_1 + b &= 0 \\ \lambda_2\left(y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2 + b - \frac{b_2^2}{4\lambda_2} &= 0 \end{aligned}$$

y realizando la translación:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \\ y_2 &= y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \end{aligned}$$

se transforma en:

$$y_2^2 = -\frac{c}{\lambda_2}$$

donde $c = b - \dfrac{b_2^2}{4\lambda_2}$. Si $-\dfrac{c}{\lambda_2} > 0$ entonces $y_2 = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{\lambda_2}}$ representa dos rectas paralelas, si $-\dfrac{c}{\lambda_2} = 0$ se obtiene un punto y si $-\dfrac{c}{\lambda_2} < 0$ se obtiene el conjunto vacío. En este caso la cónica se dice de *tipo parabólico*.

8.8. Invariantes de una cónica

Una ecuación de segundo grado en las variables x e y se puede escribir de la forma:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = (x\ \ y\ \ 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cuando igualamos esta expresión a cero obtenemos la ecuación de una curva de segundo grado, o cónica.

Definición 42 *Denominaremos invariantes de una cónica a cualquier expresión formada por los coeficientes de su ecuación que no varía al cambiar de sistema de coordenadas a otro mediante un giro o una translación.*

Los invariantes de una curva de segundo grado son los siguientes:

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, \qquad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}.$$

Cuando $I_3 \neq 0$ diremos que tenemos una cónica no degenerada, es decir, una elipse, una parábola o una hipérbola.

Si $I_2 > 0$ tenemos una elipse, si $I_2 < 0$ una hipérbola y si $I_2 = 0$ una parábola.

8.9. Clasificación y ecuación reducida de las cónicas

Sea una cónica de ecuación:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0$$

y sean λ_1 y λ_2 los autovalores de la matriz de la parte principal $A_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Consideremos también el valor de

$$\gamma = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix}$$

Con esta información podemos clasificar la cónica mediante el siguiente esquema:

TIPO DE CURVA	CÓNICA ($I_3 \neq 0 \Rightarrow$ no degenerada, $I_3 = 0 \Rightarrow$ degenerada)	EC. REDUCIDA
$I_2 > 0$ Cónica con centro de tipo Elíptico	$I_3 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} I_1 \cdot I_3 < 0 \Rightarrow \text{Elipse real} \\ I_1 \cdot I_3 > 0 \Rightarrow \text{Elipse imaginaria} \end{cases}$	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = -\frac{I_3}{I_2}$
	$I_3 = 0 \Rightarrow$ Un punto	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$
$I_2 < 0$ Cónica sin centro de tipo Hiperbólico	$I_3 \neq 0 \Rightarrow$ Hipérbola	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = -\frac{I_3}{I_2}$
	$I_3 = 0 \Rightarrow$ Dos rectas que se cortan en un punto	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$
$I_2 = 0$ Cónica sin centro de tipo Parabólico	$I_3 \neq 0 \Rightarrow$ Parábola	$I_1 y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}x = 0$
	$I_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma < 0 \Rightarrow \text{Dos rectas paralelas} \\ \gamma = 0 \Rightarrow \text{Dos rectas coincidentes} \\ \gamma > 0 \Rightarrow \text{Dos rectas imaginarias} \end{cases}$	$I_1 y^2 + \frac{\gamma}{I_1} = 0$

8.10. Deteminación de los ejes y el centro de una cónica

Supongamos que

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0$$

representa una cónica no degenerada y que tiene centro. A continuación expondremos un método para calcular los ejes y el centro de una cónica.

Para calcular *un vector director de los ejes* sólo tendremos que calcular cualquier autovector de la matriz

$$A_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Para calcular *el centro* de la cónica tendremos que resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2a_{11}x + 2a_{12}y + 2a_1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2a_{12}x + 2a_{22}y + 2a_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

En el caso de una cónica de tipo parabólico nos interesará calcular el vértice y el eje principal de la parábola.

Por el teorema de la función implícita tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$$

donde tendremos que $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(x_o,y_o)}$ es la pendiente de la recta tangente en el vértice $V(x_o, y_o)$.

Sea $\vec{v}_1 = (a, b)$ un autovector asociado al eje de la parábola que está asociado al autovalor $\lambda_1 = 0$, de manera que la pendiente de este vector es $k = \dfrac{b}{a}$. Si tomamos $\vec{v}_2 = (-b, a)$ tendremos un vector normal, cuya pendiente es $-\dfrac{1}{k} = -\dfrac{a}{b}$ y coincide con la pendiente de la recta tangente al vértice.

Tenemos entonces que *la pendiente de la recta tangente al vértice* es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_o,y_o)} = \left.\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}\right|_{(x_o,y_o)} = -\frac{1}{k}$$

Como el vértice pertenece a la parábola tenemos entonces que $f(x_o, y_o) = 0$. De manera que ahora ya tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas con las cuales podemos sacar *el vértice de la parábola*:

$$\left.\begin{array}{r} f(x_o, y_o) = 0 \\[2ex] \left.\dfrac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}\right|_{(x_o,y_o)} = -\dfrac{1}{k} \end{array}\right\}$$

Una vez calculado el vértice de la parábola (x_o, y_o), junto con $\vec{v}_1 = (a, b)$ vector director del eje de la parábola, podremos calcular la ecuación del *eje principal de la parábola*.

EJERCICIOS

1. Los puntos $A(0,3)$ y $B(4,0)$ son diagonalmente opuestos en una circunferencia. Halla la ecuación de ésta.

2. Escribe la ecuación de la elipse de focos $(-2,1)$ y $(2,1)$, y $\varepsilon = 0.8$.

3. Completando cuadrados, determina los elementos y escribe la forma canónica de las cónicas dadas por

   a) $2x^2 + 3y^2 - 8x + 30y + 71 = 0$

   b) $4x^2 - y^2 - 4x - 3 = 0$

   c) $9x^2 + 9y^2 - 36x + 6y + 34 = 0$

4. Escribe la ecuación de la hipérbola que tienen su centro en el origen, un vértice en el punto $V(1,0)$ y un foco en $F(2,0)$.

5. Halla el eje, el vértice y la ecuación de la parábola cuya directriz es la recta $y = -3$ y que tiene por foco $F(1,1)$.

6. Halla la posición relativa del punto $P(2,2)$ y la elipse

$$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$$

7. Escribir la ecuación de la elipse con vértices $(-1,2)$ y $(-7,2)$, y el eje menor $b = 1$.

8. Escribir la ecuación de la hipérbola con asíntotas $y = \pm 2x - 1$ y un foco en $(3,-1)$.

9. Escribir la ecuación de las parábolas de foco $(2,-1)$, que pasan por $(2,2)$ y tienen el eje en la dirección del eje OX.

10. Clasificar la cónica y expresarla en su forma canónica:

    a) $x^2 + y^2 + 2xy - 7x - 5y + 7 = 0$

    b) $-2x^2 + y^2 + 4xy + 2x - 1 = 0$

    c) $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 2xy = 5$

    d) $2x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 1 = 0$

    e) $8x^2 + 17y^2 + 12xy - 8x - 16y = 8$

f) $x^2 + 4y^2 + 4xy - 6x - 12y + 9 = 0$

g) $x^2 - y^2 + 2x + 6y = 13$

h) $x^2 - 2y^2 - xy + 2x + 5y - 3 = 0$

11. Clasificar, para distintos valores de los parámetros α, $\beta \in \mathbb{R}$, las cónicas que admiten por ecuaciones:

$$\alpha x^2 + \alpha y^2 + 2\beta xy + (\alpha + \beta)(x + y) + 1 = 0$$

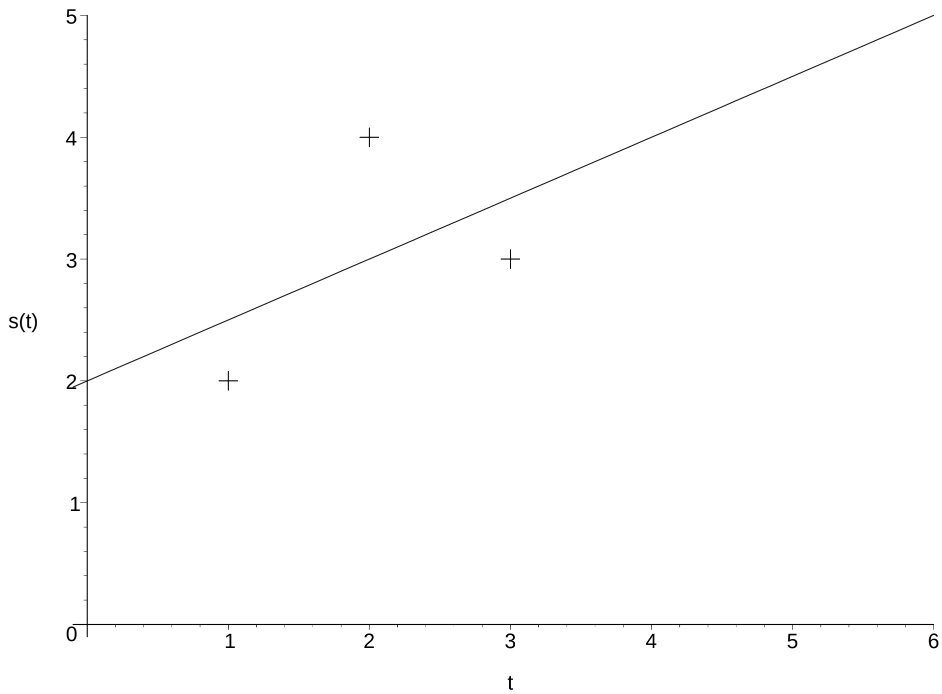
Capítulo 9

Mínimos Cuadrados

9.1. Introducción

A la hora de estudiar cierto problema es frecuente obtener una serie de datos (puntos) recogidos de la realización de cierto experimento y tratar de explicar estos resultados mediante una serie de variables. En muchos casos el problema se reduce a encontrar una gráfica que pase por esos puntos. Dependiendo del tipo de problema determinaremos el tipo de función. Por ejemplo, si un automóvil se mueve con velocidad constante y medimos la distancia $s(t)$ recorrida cada minuto, esperamos que la gráfica de la distancia recorrida sea una recta. Un polinomio de grado superior o una función exponencial o logarítmica no serían adecuadas.

Supongamos que sugerimos en nuestro modelo una recta de la forma $s = at + b$ y sabemos que el automóvil pasa por los puntos $(1, 2), (2, 4), (3, 3)$. Con estos datos nos gustaría determinar cual es la pendiente u ordenada en el origen de la recta $s = at + b$



Como la recta debe pasar por los tres puntos tenemos entonces que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Pero tenemos el siguiente problema, el sistema es incompatible debido a que el rango de la matriz del sistema es menor que el de la matriz ampliada. De manera que nuestro problema no se puede resolver con exactitud. En todo caso, lo mejor que podemos hacer es encontrar la recta que mejor se ajuste a los datos. Pero, ¿qué entendemos por mejor ajuste? El mejor ajuste es algo que puede tener distintos significados, dependiendo de cuáles de los aspectos de la solución se necesiten resaltar. En este caso, supongamos que lo deseable es que la mejor recta sea tal que los errores en la dirección del eje Y sean lo menor posibles.

$$\varepsilon_1 = 2 - (b + a \cdot 1), \;\; \varepsilon_2 = 4 - (b + a \cdot 2), \;\; \varepsilon_3 = 3 - (b + a \cdot 3)$$

entonces el número

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2$$

es mínimo. Una solución para a y b que minimice esta suma de los cuadrados de los errores se llama solución de **mínimos cuadrados**.

9.1.1. Ajuste de mínimos cuadrados

Nos podemos plantear también el siguiente problema más general que el anterior. Dada un subespacio vectorial V de un espacio vectorial euclídeo E, y un vector $\vec{y}$ que no pertenece a V, definimos la distancia del vector $\vec{y}$ al subespacio V como

$$d(\vec{y},V) = \text{mín}\left\{\|\vec{y}-\vec{a}\|, \vec{a}\in V\right\}$$

Si V es de dimensión finita, $\dim(V)=n$, podemos considerar la base ortonormal $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n\}$ de V. Puesto que cualquier vector de V se puede expresar como una combinación de los vectores de esta base, la búsqueda del ínfimo se reduce a encontrar n números reales $(x_1,x_2,...,x_n)$ tales que

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{a}_i \quad \text{y} \quad \left\|\vec{y}-\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{a}_i\right\|$$

sea mínimo. Dado que $\vec{y}^{\perp} = \vec{y} - \sum_{i=1}^{n}\langle\vec{y},\vec{a}_i\rangle\cdot\vec{a}_i \in V^{\perp}$ tenemos

$$\left\|\vec{y}-\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{a}_i\right\|^2 = \left\|\vec{y}^{\perp}+\sum_{i=1}^{n}\langle\vec{y},\vec{a}_i\rangle\cdot\vec{a}_i-\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{a}_i\right\|^2 =$$

$$= \left\|\vec{y}^{\perp}+\sum_{i=1}^{n}\left(\langle\vec{y},\vec{a}_i\rangle - x_i\right)\cdot\vec{a}_i\right\|^2 = \left\|\vec{y}^{\perp}\right\|^2 + \left\|\sum_{i=1}^{n}\left(\langle\vec{y},\vec{a}_i\rangle - x_i\right)\cdot\vec{a}_i\right\|^2$$

Como tenemos una suma de cuadrados en la cual el primer sumando es independiente de las variables $\{x_i\}_{i=1}^n$, el mínimo lo alcanzaremos cuando las variables $\{x_i\}_{i=1}^n$anulen el segundo sumando y eso sucederá cuando tengamos $x_i = \langle\vec{y},\vec{a}_i\rangle$. Por lo tanto, el ínfimo buscado se alcanza cuando el vector $\vec{a}$ es de la forma $\vec{a} = \sum_{i=1}^{n}\langle\vec{y},\vec{a}_i\rangle\cdot\vec{a}_i$, que es justamente el vector de proyección ortogonal de $\vec{y}$ sobre el subespacio V.

Si A es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n\}$, el problema anterior es equivalente a encontrar el vector $\vec{x}$ que minimice

$$\|\vec{y}-A\vec{x}\|^2 = \left\|\vec{y}-\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{a}_i\right\|^2$$

y hemos probado que justamente el ínfimo se alcanza cuando $A\vec{x}$ es el proyectado de $\vec{y}$ sobre V,

$$A\vec{x} = A\left(A^tA\right)^{-1}A^t\vec{y}$$

multiplicando por A^t tendremos

$$A^tA\vec{x} = A^tA\left(A^tA\right)^{-1}A^t\vec{y} = A^t\vec{y}$$

de manera que

$$\vec{x} = \left(A^tA\right)^{-1}A^t\vec{y}$$

Si elegimos $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$ de modo que sea una base ortonormal, la matriz A está formada por vectores unitarios ortogonales entre sí y por lo tanto $A^tA = I$, y que tendremos la expresión anterior quedará todavía más simplificada, obteniéndose que $\vec{x} = A^t\vec{y}$

Volviendo al ejemplo inicial, en el que teníamos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

en este caso

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

pero las columnas de A no están formadas por vectores ortogonales, por lo tanto

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 9 \\ 19 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la recta que mejor se ajusta a los datos del ejemplo será

$$s = \frac{1}{2}t + 2$$

Ejemplo:

Como profesora de la asignatura me gustaría realizar unas estadísticas del porcentaje de aprobados obtenidos a lo largo del curso en los distintos parciales realizados en clase. Vamos a tener en cuenta dos tipos de datos, el porcentaje de aprobados sobre el total de matriculados y el porcentaje de aprobados sobre el total de alumnos presentados al examen.

Parcial	1	2	3
Porcentaje de aprobados	51.51	20.58	23.52
Porcentaje de aprobados sobre los presentados	54.83	23.33	38.09

Me gustaría trazar una recta que se acerque a los puntos de la tabla. Veamos cual es la ecuación de la recta que mejor se ajusta a los datos cuando tenemos en cuenta el porcentaje de aprobados sobre el total de matriculados en la asignatura.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 51.51 \\ 20.58 \\ 23.52 \end{pmatrix}$$

De manera que

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A^t \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 51.51 \\ 20.58 \\ 23.52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 95.61 \\ 163.23 \end{pmatrix}$$

Buscamos una recta de la forma $y = mx + n$ que mejor se ajuste a los datos y, por tanto, los parámetros m y n tienen que satisfacer que

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 95.61 \\ 163.23 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 95.61 \\ 163.23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59.86 \\ -13.995 \end{pmatrix}$$

luego

$$y = 59.86 - 13.995x$$

De manera que en el próximo parcial debería esperar un porcentaje de aprobados del

$$y = 59.86 - 13.995 \cdot 4 = 3.88\,\%$$

Realizando el mismo estudio pero cuando tenemos en cuenta el porcentaje de aprobados sobre el total de alumnos presentados obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 54.83 \\ 23.33 \\ 38.09 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 116.25 \\ 215.76 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 116.25 \\ 215.76 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55.49 \\ -8.37 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 55.49 - 8.37x$$

por tanto, en el próximo parcial se espera un porcentaje de aprobados del 22 % sobre el total de los presentados al examen: $y = 55.49 - 8.37 \cdot 4 = 22.01\,\%$

9.2. Aplicaciones

9.2.1. Regresión Lineal

Hemos visto que la relación entre dos variables x e y es la ecuación lineal $y = ax + b$. Ya hemos comentado anteriormente que datos experimentales dan lugar a un conjunto de puntos $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$ y nos planteamos la búsqueda de una recta lo más próxima posible al conjunto de puntos anterior. Hemos visto que la recta de mínimos cuadrados es aquella recta para la que se minimiza la suma de los errores cuadráticos. Los coeficientes (a, b) de dicha recta se denominan coeficientes de regresión lineal que se obtienen al tratar de minimizar

$$\sum_{n=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2$$

9.2.2. Regresión Múltiple

Supongamos que un experimento implica dos variables independientes x e y, así como una variable dependiente z.

Una modelización sencilla para ajustar los datos experimentales $\{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=1}^{n}$ consiste en utilizar un modelo lineal $z = a + bx + cy$, de manera que se minimice

$$\sum_{i=1}^{n} (z_i - a - bx_i - cy_i)^2 \text{ , donde } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Esto nos lleva a buscar la solución de mínimos cuadrados del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

9.2.3. Mínimos cuadrados con factorización QR

• **Introducción:**

Supongamos que hemos recogido los siguientes datos

x	1	1	1	2	3	4
y	1	1	1.0005	2.0001	2.99999	3.899999
z	1	1.0003	1.35	2.004	3.0001	3.9888
t	1	1.003	2.3	2.002	3.001	4

y queremos encontrar el hiperplano que mejor se ajuste a los datos, donde t será la variable a explicar y x, y y z las variables explicativas. En este caso tenemos que estimar la ecuación del hiperplano $t = a + bx + cy + dz$ que mejor se ajuste a los datos. Formamos entonces la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1.0003 \\ 1 & 1 & 1.0005 & 1.35 \\ 1 & 2 & 2.0001 & 2.004 \\ 1 & 3 & 2.99999 & 3.0001 \\ 1 & 4 & 3.899999 & 3.9888 \end{pmatrix}$$

de manera que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1.0003 \\ 1 & 1 & 1.0005 & 1.35 \\ 1 & 2 & 2.0001 & 2.004 \\ 1 & 3 & 2.99999 & 3.0001 \\ 1 & 4 & 3.899999 & 3.9888 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.003 \\ 2.3 \\ 2.002 \\ 3.001 \\ 4 \end{pmatrix}$$

en este caso tendremos que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \left(A^t A\right)^{-1} A^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1.003 \\ 2.3 \\ 2.002 \\ 3.001 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz A^tA obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1.0005 & 2.0001 & 2.99999 & 3.899999 \\ 1 & 1.0003 & 1.35 & 2.004 & 3.0001 & 3.9888 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1.0003 \\ 1 & 1 & 1.0005 & 1.35 \\ 1 & 2 & 2.0001 & 2.004 \\ 1 & 3 & 2.99999 & 3.0001 \\ 1 & 4 & 3.899999 & 3.9888 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 12 & 11.901 & 12.343 \\ 12 & 32 & 31.601 & 32.314 \\ 11.901 & 31.601 & 31.211 & 31.916 \\ 12.343 & 32.314 & 31.916 & 32.75 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es casi nulo

$$\left|A^tA\right| = \begin{vmatrix} 6 & 12 & 11.901 & 12.343 \\ 12 & 32 & 31.601 & 32.314 \\ 11.901 & 31.601 & 31.211 & 31.916 \\ 12.343 & 32.314 & 31.916 & 32.75 \end{vmatrix} = 9.114\,7 \times 10^{-3}$$

Nos encontramos ante el caso de una matriz A^tA **mal condicionada**. Por lo general esto significa que un error numérico pequeño en una operación en los cálculos de cada renglón causa un error muy grande en la solución, cuando tratamos de calcular la inversa. Como respuesta a este problema puede usarse la factorización QR de A.

- **Factorización QR:**

La factorización QR se basa en que cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ con m columnas linealmente independientes, y por lo tanto $n \geq m$, puede escribirse como producto de dos matrices, una ortonormal $Q \in \mathcal{M}_{n\times m}$ (con columnas ortonormales) y otra triangular superior $R \in \mathcal{M}_{m\times m}$ invertible. Este procedimiento es muy útil en los cálculos numéricos, en especial para aproximar los autovalores y autovectores.

Es fácil, pero no necesario, llegar a fórmulas para Q y R con base en las ecuaciones del proceso Gram-Schmidt. Lo que se hace en la práctica es ortonormalizar las columnas de A para obtener Q y a continuación se determina R con

$$R = Q^tA$$

ya que $Q^tA = Q^tQR = IR = R$ dado que al ser Q ortonomal tendremos que $Q^{-1} = Q^t$

Ejemplo:

Determinar la factorización QR de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $\vec{u}_1 = (1,1,1,1)\,, \vec{u}_2 = (1,-1,1,1)\,, \vec{u}_3 = (0,0,1,1)$.

Aplicando el proceso Gram-Schmidt tomamos

$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 = (1,1,1,1) \Rightarrow \|\vec{v}_1\| = \sqrt{4} = 2$

$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \dfrac{\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\vec{v}_1 = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow \|\vec{v}_2\| = \sqrt{3}$

$\vec{v}_3 = \vec{u}_3 - \dfrac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\vec{v}_1 - \dfrac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2}\vec{v}_2 = \left(-\dfrac{2}{3}, 0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) \Rightarrow \|\vec{v}_3\| = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

y formamos la matriz Q poniendo como columnas los vectores $\dfrac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}, \dfrac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}, \dfrac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|} \Rightarrow$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

como $R = Q^t A$ entonces

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

- **Aplicación de la factorización QR en el cálculo de mínimos cuadrados:**

La idea fundamental para utilizar la factorización QR en el cálculo de regresiones se debe a que las matrices ortogonales preservan las longitudes, por tanto también lo harán con la longitud del error cuadrático.

Volviendo al ejemplo de la introducción de esta sección tenemos que

$$A\vec{x} = \vec{t} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1.0003 \\ 1 & 1 & 1.0005 & 1.35 \\ 1 & 2 & 2.0001 & 2.004 \\ 1 & 3 & 2.99999 & 3.0001 \\ 1 & 4 & 3.899999 & 3.9888 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.003 \\ 2.3 \\ 2.002 \\ 3.001 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Dado que A tiene columnas linealmente independientes podemos escribir $A = QR$. Si $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ es una solución por mínimos cuadrados de $A\vec{x} = \vec{t}$ con $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.003 \\ 2.3 \\ 2.002 \\ 3.001 \\ 4 \end{pmatrix}$ tendremos que $A^t A\vec{x} = A^t\vec{t} \Rightarrow (QR)^t\, QR\vec{x} = (QR)^t\, \vec{t} \Rightarrow R^tQ^tQR\vec{x} = R^tQ^t\vec{t} \Rightarrow R^tR\vec{x} = R^tQ^t\vec{t} \Rightarrow$

$$\Rightarrow R\vec{x} = Q^t\vec{t}$$

Observar que $R\vec{x} = Q^t\vec{t}$ equivale a $\vec{x} = R^{-1}Q^t\vec{t}$, ya que R es invertible. Sin embargo, en lugar de invertir R es más fácil usar la sustitución para el sistema $R\vec{x} = Q^t\vec{t}$ teniendo en cuenta que R es una matriz triangular superior.

En nuestro ejemplo tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1.0003 \\ 1 & 1 & 1.0005 & 1.35 \\ 1 & 2 & 2.0001 & 2.004 \\ 1 & 3 & 2.99999 & 3.0001 \\ 1 & 4 & 3.899999 & 3.9888 \end{pmatrix}$$

Ortonormalizando las columnas utilizando el método de Gram-Schmidt obtenemos

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{8}}{8} & -0.14727 & -0.37885 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{8}}{8} & -0.14727 & -0.37781 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{8}}{8} & -0.1386 & 0.83008 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & 0.28895 & -0.14283 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{8}}{8} & 0.72153 & 0.065414 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{8}}{4} & -0.57734 & 0.004001 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$R = Q^t A =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -0.14727 & -0.14727 & -0.1386 & 0.28895 & 0.721\,53 & -0.57734 \\ -0.37885 & -0.37781 & 0.83008 & -0.14283 & 0.065414 & 0.004001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1.0003 \\ 1 & 1 & 1.0005 & 1.35 \\ 1 & 2 & 2.0001 & 2.004 \\ 1 & 3 & 2.99999 & 3.0001 \\ 1 & 4 & 3.899999 & 3.9888 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 2\sqrt{6} & 1.983\,4\sqrt{6} & 2.0572\sqrt{6} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 1.9499\sqrt{2} & 1.9069\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0.057677 & -0.04087 \\ 0 & 0 & 0 & 0.28981 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$R\vec{x} = Q^t\vec{t} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 2\sqrt{6} & 1.9834\sqrt{6} & 2.0572\sqrt{6} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 1.9499\sqrt{2} & 1.9069\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0.057677 & -0.04087 \\ 0 & 0 & 0 & 0.28981 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -0.14727 & -0.14727 & -0.1386 & 0.28895 & 0.72153 & -0.57734 \\ -0.37885 & -0.37781 & 0.83008 & -0.14283 & 0.065414 & 0.004001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1.003 \\ 2.3 \\ 2.002 \\ 3.001 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 2\sqrt{6} & 1.9834\sqrt{6} & 2.0572\sqrt{6} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 1.9499\sqrt{2} & 1.9069\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0.057677 & -0.04087 \\ 0 & 0 & 0 & 0.28981 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2177\sqrt{6} \\ 1.6745\sqrt{2} \\ -0.17933 \\ 1.0778 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{2.2177\sqrt{6} - 2.0572\sqrt{6}\cdot 3.7190 + 1.9834\sqrt{6}\cdot 0.47392 + 2\sqrt{6}\cdot 2.2466}{\sqrt{6}} = 1.4613\times 10^{-4} \\[2ex] b = \dfrac{1.6745\sqrt{2} - 1.9069\sqrt{2}\cdot 3.7190 + 1.9499\sqrt{2}\cdot 0.47392}{2\sqrt{2}} = -2.2466 \\[2ex] c = \dfrac{-0.17933 + 0.04087\cdot 3.7190}{5.7677\times 10^{-2}} = -0.47392 \\[2ex] d = \dfrac{1.0778}{0.28981} = 3.7190 \end{cases}$$

Si no hubieramos utilizado el método anterior de factorización QR tendríamos

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (A^tA)^{-1} A^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1.003 \\ 2.3 \\ 2.002 \\ 3.001 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 12 & 11.901 & 12.343 \\ 12 & 32 & 31.601 & 32.314 \\ 11.901 & 31.601 & 31.211 & 31.916 \\ 12.343 & 32.314 & 31.916 & 32.75 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1.0005 & 2.0001 & 3.0000 & 3.9000 \\ 1 & 1.0003 & 1.35 & 2.004 & 3.0001 & 3.9888 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1.003 \\ 2.3 \\ 2.002 \\ 3.001 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8.4056 \times 10^{-3} \\ -2.4192 \\ -0.32326 \\ 3.7457 \end{pmatrix}$$

Podemos ver que este último método presenta variaciones importantes con respecto al anterior y es debido a los errores de redondeo cometidos en el cálculo de la inversa de A^tA

9.2.4. Regresión parabólica

Si los datos experimentales se agrupan en torno a una parábola, la curva de ajuste será de la forma $y = a + bx + cx^2$. Esto significa que tenemos que determinar tres parámetros a, b y c, de manera que se minimice

$$\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a - bx_i - cx_i^2\right)^2 \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Esto implica la búsqueda de la solución de mínimos cuadrados del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS

1. Halla la solución aproximada por el método de los mínimos cuadrados del sistema sobredeterminado

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Ajustar los datos $(0,1)\,,(1,3)\,,(2,4)\,,(3,4)$ y $(4,5)$ mediante una función lineal $f(x) = a + bx$ utilizando el método de mínimos cuadrados.

3. La ley de Hooke establece que la longitud y que se estira un resorte es proporcional a la fuerza x aplicada, $y = a + bx$, donde a es la longitud del resorte y b es la constante del resorte.
   Se colocan cuatro pesos direferentes de 2, 4, 6 y 8 kilogramos en el extremo de un resorte, siendo las longitudes del resorte estirado 3, 6, 8 y 9 centímetros. Calcular la constante del resorte.

4. En un parque natural, se estimó durante cuatro años consecutivos el número de ciervos con que contaba su población obteniéndose los siguientes datos

x_i =año	y_i =n^o de ciervos
1	2
2	5
3	8
4	12

   Teniendo en cuenta que el crecimiento de la población es exponencial en condiciones ideales, ajustar estos datos por una función exponencial $y = a\,\mathrm{e}^{bx}$, utilizando el método de mínimos cuadrados. Estimar el número de ciervos el año 5.

5. Los directores de una gran empresa se reúnen para analizar la situación financiera de la misma. Al estudiar los datos de la tabla que reflejan los beneficios obtenidos durante los cinco años que lleva en funcionamiento la empresa, preven que la curva que mejor puede representar los beneficios durante los próximos años puede ser una función polinómica de segundo grado $y = a + bx + cx^2$. Calcular los beneficios que esperan obtener el año siguiente

año	beneficio (millones)
1	1
2	4
3	8
4	15
5	25

6. Se consideran los siguientes puntos $(1,1),(2,4),(3,7),(4,9)$. Estudiar qué función es la que mejor se ajusta a los datos, la lineal $y=a+bx$, parabólica $y=a+bx+cx^2$ o cúbica $y=a+bx+cx^2+dx^3$.

Apéndices

A. Soluciones Tema 1: Matrices y Determinantes

EJERCICIOS

1. **Hallar x, y, z y w si**

$$3\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w-1 & 2w+3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4 & x+y+6 \\ w+z-2 & 4w+3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x = x+4 \\ 3y = x+y+6 \\ 3z = w+z-2 \\ 3w = 4w+3 \end{array}\right\},$$

la solución es: $\left[x = 2, y = 4, z = -\frac{5}{2}, w = -3\right]$

2. **Sean**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

calcular AB **y** BA.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{pmatrix}$$

BA no se puede calcular

3. **Probar que las matrices AA^t y A^tA están definidas para cualquier matriz $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$**

Solución:

$A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ entonces $A^t \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$AA^t \in M_{n\times m}(\mathbb{R}) \times M_{m\times n}(\mathbb{R}) = M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$A^tA \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \times M_{n\times m}(\mathbb{R}) = M_{m\times m}(\mathbb{R})$

4. **Encontrar AA^t y A^tA donde**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 26 \end{pmatrix}$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 12 \\ -1 & 5 & -4 \\ 12 & -4 & 16 \end{pmatrix}$$

5. **Sea** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ **calcular** A^2 **y** A^3. **Hallar** $f(A)$ **donde** $f(x) = 2x^3 - 4x + 5I$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^3 - 4\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 52 \\ 104 & -117 \end{pmatrix}$$

6. **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ **encontrar un vector** $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **no nulo tal que** $A\vec{u} = 3\vec{u}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+3y \\ 4x-3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y=3x \\ 4x-3y=3y \end{array}\right\}$, la solución del sistema es $\left[x = \frac{3}{2}y\right]$, por tanto $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}y \\ y \end{pmatrix}$ con $y \in \mathbb{R}$

7. **Encontrar todas las matrices** $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ **que conmutan con** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$MA = AM \Longrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x & x+y \\ z & t+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & t+y \\ z & t \end{pmatrix} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} x = x+z \\ x+y = t+y \\ z = z \\ t+z = t \end{array}\right\}$$

La solución es $[x = t, y = y, z = 0, t = t] \Longrightarrow M = \begin{pmatrix} t & y \\ 0 & t \end{pmatrix}$

8. **Calcular los siguientes determinantes de orden 2:**

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 1 \\ a & b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = ab - a$$

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{vmatrix} = -\cos^2\theta - \sin^2\theta = -1$$

9. **Hallar la inversa de las matrices anteriores, en el caso de que exista.**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ a & b \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{b}{-a+ab} & -\frac{1}{-a+ab} \\ -\frac{1}{b-1} & \frac{1}{b-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{a(b-1)}\begin{pmatrix} b & -1 \\ -a & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

10. **Calcular los siguientes determinantes:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = xy^2 - x^2y - xz^2 + x^2z + yz^2 - y^2z = (y-x)(z-x)(z-y)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

11. **Demostrar que si a y b son números reales, las raíces de la ecuación**

$$\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = 0$$

son reales.

$$\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = ac - ax - cx - b^2 + x^2 = 0 \Longrightarrow x = \tfrac{1}{2}\left[(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}\right]$$

12. **Calcular los siguientes determinantes mediante su desarrollo por la primera columna:**

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -56$$

13. **Calcular los siguientes determinantes reduciéndolos a una matriz triangular superior mediante operaciones elementales:**

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -16$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & -6 & -6 \\ 0 & 2 & -8 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -14$$

14. **Calcular los siguientes determinantes usando sus propiedades y efectuando un número reducido de computaciones**

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -162 = -2 \cdot 3^4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = xy - y - x + 1 = (x-1)(y-1)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

15. **Hallar las inversas de las siguientes matrices, calculando primero la matriz de**

cofactores:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{24} & \frac{5}{24} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -1 & \frac{19}{5} \end{pmatrix}$$

16. **Calcular las inversas de las anteriores matrices a través de transformaciones elementales.**

17. **Hallar la inversa de las siguientes matrices de orden** n :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 2^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+x \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 2^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ =(utilizando el método de Gauss y restándole a la fila 1 el doble de la fila 2, a la fila 2 el doble de la fila 3, etc, obtenemos a la izquierda la matriz unidad, por lo tanto a la derecha habremos obtenido la siguiente matriz que corresponde

$$\text{a la inversa)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+x \end{pmatrix}^{-1}$$ =(utilizando el método de Gauss: restamos a las filas desde la 1 hasta la $n-1$ la fila n; dividimos a las filas de la 1 a la $n-1$ por x; le restamos a la fila n todas las demás filas; dividimos las fila n por $x+n$ y le sumamos a todas las filas de la 1 a la $n-1$ la fila n, así obtenemos a la izquierda la matriz identidad y a la derecha la siguiente matriz inversa)= $$\begin{pmatrix} \frac{x+n-1}{x(x+n)} & \frac{-1}{x(x+n)} & \frac{-1}{x(x+n)} & \cdots & \frac{-1}{x(x+n)} \\ \frac{-1}{x(x+n)} & \frac{x+n-1}{x(x+n)} & \frac{-1}{x(x+n)} & \cdots & \frac{-1}{x(x+n)} \\ \frac{-1}{x(x+n)} & \frac{-1}{x(x+n)} & \frac{x+n-1}{x(x+n)} & \cdots & \frac{-1}{x(x+n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-1}{x(x+n)} & \frac{-1}{x(x+n)} & \frac{-1}{x(x+n)} & \cdots & \frac{x+n-1}{x(x+n)} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{x(x+n)} \begin{pmatrix} x+n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & x+n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & x+n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & x+n-1 \end{pmatrix}$$

18. **Encontrar los valores de para que las matrices siguientes sean inversibles:**

$$\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & -1 \\ 0 & 1 & a-3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(a+1)\,(a^2+a-4)} \begin{pmatrix} a^2+a-3 & -(a+1) & -a+2 \\ -(a+2) & (a+2)(a+1) & -a \\ 1 & -(a+1) & a^2-2 \end{pmatrix}$$
, es invertible si $a \neq -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & -1 \\ 0 & 1 & a-3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2(a^2-2a-2)} \begin{pmatrix} a^2+2a-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2(a-3) & 2 \\ 0 & -2 & 2(a+1) \end{pmatrix}$$, es in-

vertible para cualquier valor de a

19. **Comprobar, sin desarrollar, que el determinante de la matriz A es múltiplo de 9:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 5 & 12 & 4 \\ 3 & 18 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 5 & 12 & 4 \\ 3 & 18 & 9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 5 & 12 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

20. **Demostrar el siguiente determinante conocido como determinantes de Vandermonde:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)\,(c-a)\,(d-a)\,(c-b)\,(d-b)\,(d-c)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix} =$$

$$(b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a & d+a \\ a^3 & ab+a^2+b^2 & ac+a^2+c^2 & ad+a^2+d^2 \end{vmatrix} =$$

$$(b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b+a & c-b & d-b \\ a^3 & ab+a^2+b^2 & a(c-b)+c^2-b^2 & a(d-b)+d^2-b^2 \end{vmatrix} =$$

$$(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b+a & 1 & 1 \\ a^3 & ab+a^2+b^2 & a+c+b & a+d+b \end{vmatrix} =$$

$$(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b+a & 1 & 0 \\ a^3 & ab+a^2+b^2 & a+c+b & d-c \end{vmatrix} =$$

$$(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

21. **Calcular el rango de las siguientes matrices**

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 5 & 8 & 16 \\ 4 & 2 & 6 & 12 \\ 5 & 6 & 12 & 23 \end{pmatrix}$

(a) $rg\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} = 3$, ya que $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -1$

(b) $rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = 3$, ya que $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -9$

(c) $rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 5 & 8 & 16 \\ 4 & 2 & 6 & 12 \\ 5 & 6 & 12 & 23 \end{pmatrix} = 3$, ya que la cuarta columna es la suma de las otras tres y $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 12 \end{vmatrix} = -1$

22. **Consideremos que nos encontramos en una empresa de electrodomésticos que posee tres tiendas cada una de las cuales tiene las siguientes existencias:**

Tienda 1: 10 TV, 15 DVD, 9 cadenas musicales (CM) y 8 conjuntos compactos de TV, DVD y CM

Tienda 2: 20 TV, 14 DVD, 8 CM y 5 conjuntos compactos de TV, DVD y CM

Tienda 3: 30 TV, 13 DVD, 7 CM y 2 conjuntos compactos de TV, DVD y CM

Si la tienda abastece a sus tiendas con los siguientes artículos:

Tienda 1: 1 TV, 3 DVD, 5 CM y 0 conjuntos compactos de TV, DVD y CM

Tienda 2: 4 TV, 9 DVD, 6 CM y 2 conjuntos compactos de TV, DVD y CM

Tienda 3: 7 TV, 15 DVD, 7 CM y 4 conjuntos compactos de TV, DVD y CM

a) **Construye las matrices de existencias y abastecimiento. ¿Cuál es el nuevo nivel de existencias?**

$$E_0 = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 15 & 14 & 13 \\ 9 & 8 & 7 \\ 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 15 \\ 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow E_1 = E_0 + A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 15 & 14 & 13 \\ 9 & 8 & 7 \\ 8 & 5 & 2 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 15 \\ 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 24 & 37 \\ 18 & 23 & 28 \\ 14 & 14 & 14 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

b) **Se tiene un informe sobre las ventas en notación matricial:**

$$V = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 12 & 9 & 6 \\ 8 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el nuevo nivel de existencias?

$$E_2 = E_1 - V = \begin{pmatrix} 11 & 24 & 37 \\ 18 & 23 & 28 \\ 14 & 14 & 14 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 12 & 9 & 6 \\ 8 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 18 & 34 \\ 6 & 14 & 22 \\ 6 & 8 & 10 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

c) **Si la empresa quiere aumentar un 50 % su inventario porque existen expectativas de aumentar las ventas. ¿Cuál debería ser el nuevo nivel de inventario en cada tienda?**

$$E_3 = 1.5E_2 = 1.5 \begin{pmatrix} 2 & 18 & 34 \\ 6 & 14 & 22 \\ 6 & 8 & 10 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 27 & 51 \\ 9 & 21 & 33 \\ 9 & 12 & 15 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

d) **Si el precio de venta de un televisor es de 500 Euros, un DVD es de 300 Euros, el de la cadena musical es de 250 Euros y el del equipo compacto es de 700 Euros. ¿Cuál es el valor de las existencias en cada tienda?**

Antes de aumentar el inventario el valor de las existencias es:

$$C_2 = \begin{pmatrix} 500 & 300 & 250 & 700 \end{pmatrix} E_2 = \begin{pmatrix} 500 & 300 & 250 & 700 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 18 & 34 \\ 6 & 14 & 22 \\ 6 & 8 & 10 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7100 & 18\,000 & 28\,900 \end{pmatrix}$$

Después de aumentar el inventario el valor de las existencias es:

$$C_3 = \begin{pmatrix} 500 & 300 & 250 & 700 \end{pmatrix} E_3 = \begin{pmatrix} 500 & 300 & 250 & 700 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 27 & 51 \\ 9 & 21 & 33 \\ 9 & 12 & 15 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10\,650 & 27\,000 & 43\,350 \end{pmatrix}$$

e) **Si queremos sacar un total de P_1 Euros en la Tienda 1, P_2 Euros en la Tienda 2 y P_3 Euros en la Tienda 3. ¿Se podría saber qué precios se deberían fijar en cada artículo?**

No habría una solución única dado que la matriz de existencias no tiene inversa y por lo tanto el sistema matricial $C = P \cdot E$ no tiene una solución única y tenemos tres ecuaciones linealmente independientes ($rg(E) = 3$) y cuatro incógnitas.

f) **Supongamos que en lugar de 4 artículos en esta empresa sólo hubiese tres, TV, DVD y CM, y que el nivel de existencias de la empresa en el momento actual viene dado por la matriz**

$$\begin{array}{c} \\ TV \\ DVD \\ CM \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} T1 & T2 & T3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 20 & 16 \\ 15 & 14 & 8 \\ 9 & 8 & 15 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calcular los precios que debemos poner a cada artículo para obtener 2.000 Euros en la tienda 1, 3.000 Euros en la tienda 2 y 2.500 Euros en la tienda 3.

$$\begin{pmatrix} 2000 & 3000 & 2500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 20 & 16 \\ 15 & 14 & 8 \\ 9 & 8 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 & 3000 & 2500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 20 & 16 \\ 15 & 14 & 8 \\ 9 & 8 & 15 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 2000 & 3000 & 2500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{73}{848} & \frac{43}{424} & \frac{2}{53} \\ \frac{153}{1696} & -\frac{3}{848} & -\frac{5}{53} \\ \frac{3}{848} & -\frac{25}{424} & \frac{5}{53} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11\,375}{106} & \frac{2375}{53} & \frac{1500}{53} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 107.31 & 44.811 & 28.302 \end{pmatrix}$$

El precio de los televisores debe ser 107.31 euros, el de los DVD 44.811 y el de las CM 28.302

Aplicaciones a la Criptografía:

El mundo de las telecomunicaciones y las nuevas tecnologías de la información se interesa cada vez más por la transmisión de mensajes encriptados que sean difíciles de desencriptar por otros, en caso de ser interceptados, pero que se decodifiquen con facilidad por quienes los reciben. Hay muchas formas interesantes de cifrar o encriptar mensajes, y en su mayor parte usan la teoría de números o el álgebra lineal. Describiremos aquí un método que es eficaz, en especial cuando se usa una matriz de gran tamaño. En los ejercicios trabajemos con matrices pequeñas para evitar grandes cálculos manuales.

Comenzaremos con una matriz M **invertible, que sólo la conocen quienes la trasmiten y quienes la reciben. Por ejemplo,**

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

supongamos que se desea encriptar el mensaje:

ATTACK NOW

Reemplazamos cada letra por el número que le corresponde a su posición en el alfabeto (A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z) y representamos un espacio por 0.

El mensaje anterior se ha convertido en la sucesión de números 1, 20, 20,1, 3, 11, 0, 14, 15, 23, que agrupamos en una sucesión de vectores columna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 \\ 23 \end{pmatrix}$$

y multiplicamos por M **por la izquierda:**

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 20 & 3 & 0 & 15 \\ 20 & 1 & 11 & 14 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77 & -56 & 35 & 56 & 47 \\ 39 & -18 & 19 & 28 & 31 \end{pmatrix}$$

Con lo que el mensaje cifrado que se enviará es 77, 39, -56, -18, 35, 19, 56, 28, 47, 31.

Para desencriptar el mensaje quien lo recibe debe calcular M^{-1}**,**

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

y multiplicar por los números recibidos agrupados en una sucesión de vectores columna igual que antes, obtenemos el mensaje original.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 77 & -56 & 35 & 56 & 47 \\ 39 & -18 & 19 & 28 & 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 20 & 3 & 0 & 15 \\ 20 & 1 & 11 & 14 & 23 \end{pmatrix}$$

23. **Para aquellos alumnos que estén cursando la asignatura de Álgebra, os voy a dar un breve pero importante consejo para poder aprobar la asignatura:**

$$1, 9, 10, 22, 24, 43, 16, 37, 53, 24, 36, 56, 16, 28, 44, 37, 17, 34, 21, 18, 20, 25, 18, 31, 1, 20, 20$$

Para que este mensaje sea accesible a todos, solamente comentar que el mensaje ha sido encriptado basándose en el método anterior mediante la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

pero utilizando el alfabeto español (la misma asignación anterior, pero incluyendo nuestra querida Ñ). Ayuda a tus compañeros y desencriptar el mensaje.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 22 & 16 & 24 & 16 & 37 & 21 & 25 & 1 \\ 9 & 24 & 37 & 36 & 28 & 17 & 18 & 18 & 20 \\ 10 & 43 & 53 & 56 & 44 & 34 & 20 & 31 & 20 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 20 & 19 & 12 & 1 \\ 8 & 5 & 21 & 16 & 12 & 0 & 16 & 5 & 20 \\ 1 & 19 & 16 & 20 & 16 & 17 & 2 & 13 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

HACER TODOS LOS PROBLEMAS

24. **Un alumno de la Universidad Europea de Madrid, que cursa la asignatura de Álgebra, ha conseguido interceptar un mensaje entre las profesoras de la asignatura sobre el examen parcial. El mensaje es**

$$9, 7, 32, 28, 21, 19, 38, 38, 86, 58, 32, 32, 82, 50, 38, 38, 56, 24, 40, 40, 95, 57, 79, 53$$

Sabe que el mensaje ha sido encriptado con una matriz cuadrada 2×2, y sospecha que al final del mensaje aparece la firma de una de las profesoras: RRSM. Ayuda a tus compañeros y desencripta el mensaje.

La matriz del mensaje es $\begin{pmatrix} 9 & 32 & 21 & 38 & 86 & 32 & 82 & 38 & 56 & 40 & 95 & 79 \\ 7 & 28 & 19 & 38 & 58 & 32 & 50 & 38 & 24 & 40 & 57 & 53 \end{pmatrix}$ y la matriz desencriptada de la firma es $\begin{pmatrix} 19 & 20 \\ 19 & 13 \end{pmatrix}$, por tanto tendremos que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 95 & 79 \\ 57 & 53 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 20 \\ 19 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 20 \\ 19 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 95 & 79 \\ 57 & 53 \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$\begin{pmatrix} 19 & 20 \\ 19 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{53}{532} & -\frac{79}{532} \\ -\frac{3}{28} & \frac{5}{28} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 32 & 21 & 38 & 86 & 32 & 82 & 38 & 56 & 40 & 95 & 79 \\ 7 & 28 & 19 & 38 & 58 & 32 & 50 & 38 & 24 & 40 & 57 & 53 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 13 & 9 & 19 & 22 & 16 & 17 & 19 & 4 & 20 & 19 & 20 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 14 & 0 & 16 & 0 & 16 & 0 & 19 & 13 \end{pmatrix}$$

Así que el mensaje será CAMBIAR UNO POR DOS RRSM

B. Soluciones Tema 2: Sistemas de Ecuaciones Lineales

EJERCICIOS

1. **Resolver los sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de eliminación de Gauss**

   (a) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=1 \\ x+y-2z=2 \end{array}\right\}$, la solución es $\left[x=\frac{7}{9}, y=-\frac{1}{9}, z=-\frac{2}{3}\right]$

   (b) $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=6 \\ 2x+y-3z=-3 \\ x-3y+3y=10 \end{array}\right\}$, la solución es $[x=10, y=7, z=10]$

   (c) $\left.\begin{array}{r} 3x+y-z+2t-7=0 \\ 2x-2y+5z-7t-1=0 \\ -4x-4y+7z-11t+13=0 \end{array}\right\}$, la solución es $\left[x=\frac{3}{8}t-\frac{3}{8}z+\frac{15}{8}, y=\frac{17}{8}z-\frac{25}{8}t+\frac{11}{8}\right]$

   (d) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ 2x-y+3z=4 \\ 3x+y-z=3 \\ 2x-2z=0 \end{array}\right\}$, la solución es $[x=1, y=1, z=1]$

2. **Resolver los siguientes sistemas, siempre que sea posible, por inversión de la matriz del sistema y por la regla de Cramer:**

   (a) $\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ 2x+y=4 \end{array}\right\}$, la solución es $[x=1, y=2]$

   (b) $\left.\begin{array}{r} 2x+3y+z=35 \\ x+2y+5z=45 \\ 3x+2y+z=40 \end{array}\right\}$, la solución es $\left[x=\frac{195}{22}, y=\frac{85}{22}, z=\frac{125}{22}\right]$

   (c) $\left.\begin{array}{r} x+2y+z=4 \\ x+3y+z=5 \\ 2x+y+z=4 \end{array}\right\}$, la solución es $[x=1, y=1, z=1]$

3. **Estudiar la compatibilidad de los sistemas siguientes que a continuación se describen en función de los valores que pueden tomar los parámetros que en ellos aparecen. Resolver aquéllos que sean compatibles.**

   (a) $\left.\begin{array}{r} x+2y-3z=0 \\ 2x+5y-6z=1 \\ x-1-3z=-3 \end{array}\right\}$, la solución es $[x=3z-2, y=1]$

(b) $\left.\begin{array}{r} a^2x+y+z=3 \\ x+a^2y+z=4-a \\ x+y+a^2z=2+a^2 \end{array}\right\}$, la solución si $a \neq \pm 1$ es

$\left[x=\frac{2a+3}{(a+1)(a^2+2)}, y=\frac{2a-a^2+1}{(a+1)(a^2+2)}, z=\frac{4a+a^2+a^3+5}{(a+1)(a^2+2)}\right]$. Si $a=-1$ entonces $\left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ x+y+z=5 \\ x+y+z=3 \end{array}\right\}$ y el sistema es incompatible. Y si $a=1$ entonces $\left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ x+y+z=3 \\ x+y+z=3 \end{array}\right\}$ y la solución es $x=3-y-z$

(c) $\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=1 \\ x+ay+z+t=1 \\ x+y+a^2z+t=1 \\ x+y+z+a^3t=1 \end{array}\right\}$, la solución es $[t=0, x=1, y=0, z=0]$ si $a \neq \pm 1$ ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a^3 \end{vmatrix} = a+a^2-a^4-a^5+a^6-1=\left(a^2+a+1\right)(a+1)(a-1)^3$$

Si $a=1$ entonces el sistema es indeterminado con solución $x=1-y-z-t$

Si $a=-1$ entonces el sistema es indeterminado $\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=1 \\ x-y+z+t=1 \\ x+y+z+t=1 \\ x+y+z-t=1 \end{array}\right\}$, la solución es $[x=1-z, y=0, t=0]$

(d) $\left.\begin{array}{r} x+by+az=1 \\ ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \end{array}\right\}$, la solución es $\left[x=\frac{a-b}{(a+2)(a-1)}, y=\frac{b+ab-2}{b(a+2)(a-1)}, z=\frac{a-b}{(a+2)(a-1)}\right]$ si $b \neq 0, a \neq 1$ y $a \neq -2$

Si $b=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+az=1 \\ ax+z=1 \\ x+z=0 \end{array}\right\}$,como $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2(a-1)$, el sistema no tiene solución si $a \neq 1$, ya que el rango de la matriz de coeficientes es dos y el de la ampliada sería tres.

Si $a=1$ y $b=0$ el sistema sería $\left.\begin{array}{r} x+z=1 \\ x+z=1 \\ x+z=0 \end{array}\right\}$ y por lo tanto tampoco tendría solución porque el rango de la matriz de coeficientes sería 1 y la de la matriz ampliada sería dos.

Si $b \neq 0$ y $a = 1$ el sistema sería $\left.\begin{array}{c} x+by+z=1 \\ x+by+z=1 \\ x+by+z=b \end{array}\right\}$, por lo tanto el sistema será incompatible si $b \neq 1$ y compatible indeterminado si $b = 1$, en este caso la solución será $[x = 1 - z - by, y = y, z = z]$

Si $b \neq 0$ y $a = -2$ el sistema sería $\left.\begin{array}{c} x+by-2z=1 \\ -2x+by+z=1 \\ x-2by+z=b \end{array}\right\}$, y no tiene solución si $b \neq -2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & b & -2 \\ -2 & b & 1 \\ 1 & -2b & 1 \end{vmatrix} = 0$ y por lo tanto el rango de la matriz de coeficientes es dos, ya que $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, y $\begin{vmatrix} b & -2 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ -2b & 1 & b \end{vmatrix} = 3b\,(b+2)\,,$ $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = -3(b+2),$ $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ -2 & b & 1 \\ 1 & -2b & b \end{vmatrix} = 3b(b+2)$ y por lo tanto el rango de la matriz ampliada será tres. Mientras que si $b = -2$ y $a = -2 \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{c} x-2y-2z=1 \\ -2x-2y+z=1 \\ x+4y+z=-2 \end{array}\right\}$, la solución es $\left[x = z, y = -\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\right]$

4. **Demostrar que si el sistema**

$$\left.\begin{array}{c} -x+by+cz+dt=0 \\ ax-y+cz+dt=0 \\ ax+by-z+dt=0 \\ ax+by+cz-t=0 \end{array}\right\}$$

con a, b, c, d **todos distintos de** -1, **tiene solución distinta de la trivial, entonces se verifica la relación:**

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d} = 1$$

$$\begin{vmatrix} -1 & b & c & d \\ a & -1 & c & d \\ a & b & -1 & d \\ a & b & c & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-a & 0 & 0 & d+1 \\ 0 & -1-b & 0 & d+1 \\ 0 & 0 & -1-c & d+1 \\ a & b & c & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1+a)(1+b)(1+c)(1+d)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \frac{a}{1+a} & \frac{b}{1+b} & \frac{c}{1+c} & \frac{-1}{1+d} \end{vmatrix} =$$

$$= (1+a)(1+b)(1+c)(1+d)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{a}{1+a} & \frac{b}{1+b} & \frac{c}{1+c} & \frac{-1}{1+d}+\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c} \end{vmatrix} =$$

$$= -(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)\left[\frac{-1}{1+d}+\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}\right]$$

Este determinante será cero en el caso de que haya solución distinta de la trivial, por lo tanto $-(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)\left[\frac{-1}{1+d}+\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}\right] = 0 \Rightarrow$

$$\frac{-1}{1+d}+\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c} = 0 \Rightarrow \frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d} = 1$$

5. **Obtener una factorización LU de la matriz:**

(a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 \\ -12 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & 5 & -2 \\ 20 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -12 & -1 & -4 & -4 & -1 \\ 4 & -3 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -12 & -1 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \\ 20 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

(a) $$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 \\ -12 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & 5 & -2 \\ 20 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) $$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -12 & -1 & -4 & -4 & -1 \\ 4 & -3 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) $$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -12 & -1 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \\ 20 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. **Resolver el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ empleando una factorización $A = LU$**

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A\vec{x} = \overrightarrow{b} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ definiendo}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ tendremos } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} \Rightarrow A\vec{x} = \overrightarrow{b} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} \text{ definiendo}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ tendremos } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow A\vec{x} = \overrightarrow{b} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ definiendo}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ tendremos } \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

PROBLEMAS

- **Sobre fábricas de ordenadores y cambios de moneda extranjera**

1. **Una empresa fabrica tres tipos de ordenadores: JP1, JP2 y JP3. Para armar un JP2 se necesitan 10 horas, otras 2 para probar sus componentes y 2 horas más para instalar el software. El tiempo requerido por el JP3 es de 12 horas para su ensamblado, 2'5 horas para probarlo y 2 horas para instalar software. El JP1, el más sencillo de la línea, necesita 6 horas de ensamblado, 1'5 horas de prueba y 1'5 horas de instalación de software. Si la fabrica de esta empresa dispone de 1560 horas de trabajo por mes para armar, 340 horas para probar y 320 horas para instalar. ¿Cuántos ordenadores de cada tipo puede producir en un mes?**

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 & 12 \\ 1.5 & 2 & 2.5 \\ 1.5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} NJP1 \\ NJP2 \\ NJP3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1560 \\ 340 \\ 320 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} NJP1 \\ NJP2 \\ NJP3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.666\,67 & 2.666\,7 & 0.666\,67 \\ 0.5 & -4.0 & 2.0 \\ 0.0 & 2.0 & -2.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1560 \\ 340 \\ 320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Se producirán 80 ordenadores JP1, 60 ordenadores JP2 y 40 ordenadores JP3

2. **Un empresario estadounidense necesita, en promedio, cantidades fijas de yenes japoneses, libras inglesas y marcos alemanes durante cada viaje de negocios. Este año viajó 3 veces. La primera vez cambio un total de \$2.550 con las siguientes tasas: 100 yenes por dólar, 0'6 libras por dólar y 1'6 marcos por dólar. La segunda vez cambió \$2.840 en total con tasas de 125 yenes, 0'5 libras y 1'2 marcos por dólar. La tercera vez cambió un total de \$2.800 a 100 yenes, 0'6 libras y 1'2 marcos por dólar. ¿Cuál es la cantidad fija de yenes, marcos y libras que cambia en los viajes?**

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{100} & \frac{1}{0.6} & \frac{1}{1.6} \\ \frac{1}{125} & \frac{1}{0.5} & \frac{1}{1.2} \\ \frac{1}{100} & \frac{1}{0.6} & \frac{1}{1.2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ L \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2550 \\ 2840 \\ 2800 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} Y \\ L \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200.0 & -250.0 & 100.0 \\ 1.2 & 1.5 & -2.4 \\ -4.8 & 0 & 4.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2550 \\ 2840 \\ 2800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80000 \\ 600 \\ 1200 \end{pmatrix}$$

Necesitará 80000 yenes, 600 libras y 1200 marcos alemanes.

- **Sobre experimentos**

3. **En un laboratorio se realizan tres experimentos, en cada uno de los cuales se utilizan tres sustancias químicas: A, B y C. En el primer experimento se debe utilizar de la sustancia B el doble que de la sustancia A, y de la sustancia C el triple que de la A. En el segundo experimento se utilizan las mismas cantidades de sustancia B que de C, pero de sustancia A se utiliza el doble que de las anteriores. En el tercer experimento se utiliza la misma cantidad de todas las sustancias. Si se dispone de 8 gramos de sustancia A, de 7 gramos de sustancia B y de 8 gramos de sustancia C, ¿cúanto se debe utilizar de cada sustancia en cada experimento para que al final no sobre ni falte de ninguna de ellas?**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la cantidad de sustancia A en el primer experimento es 1 gr, la cantidad de sustancia A en el segundo experimento es 4 gr y en el tercero es 3 gr.

4. **Tres alimentos I, II y III contienen las cantidades de vitaminas A, B y C (en mg por Kg de alimento) recogidas en la siguiente tabla:**

	I	**II**	**III**
A	**5**	**10**	**7**
B	**12**	**5**	**4**
C	**8**	**6**	**15**

Supongamos que una persona necesita un aporte diario de vitaminas A, B y C de 14 mg, 17 mg y 20 mg, respectivamente. Plantear y resolver el sistema de ecuaciones lineales que necesitamos para determinar las cantidades diarias mínimas de alimentos I, II y III que debe ingerir una persona.

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 7 \\ 12 & 5 & 4 \\ 8 & 6 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 \\ 17 \\ 20 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{51}{1001} & \frac{108}{1001} & -\frac{5}{1001} \\ \frac{148}{1001} & -\frac{19}{1001} & -\frac{64}{1001} \\ -\frac{32}{1001} & -\frac{50}{1001} & \frac{95}{1001} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 \\ 17 \\ 20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{146}{143} \\ \frac{67}{143} \\ \frac{86}{143} \end{pmatrix}$$

Hará falta ingerir $\frac{146}{143}$ kg de alimento I, $\frac{67}{143}$ kg de alimento II y $\frac{86}{143}$ kg de alimento III

- **Sobre números y edades**

5. **Calcula las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán entonces, y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.**

$$\left.\begin{aligned} 5(x-14+y-14)&=z-14 \\ x+10+y+10&=z+10 \\ x+d&=z \\ y+d&=42 \end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 126 \\ -10 \\ 0 \\ 42 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ d \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 126 \\ -10 \\ 0 \\ 42 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 \\ 16 \\ 44 \\ 26 \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ la edad de los hijos es 18 y 16 años, y la de la madre es 44 años.

6. **Sean x, y, z tres números enteros tales que $x+y+z$, $x+y+2z$, $3x+4y-2z$ son múltiplos de 5. Demuestra que x, y, z son múltiplos de 5.**

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=5n \\ x+y+2z&=5m \\ 3x+4y-2z&=5p \end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=5\begin{pmatrix} n \\ m \\ p \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=5\begin{pmatrix} 10 & -6 & -1 \\ -8 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ m \\ p \end{pmatrix}$$

7. **Un número N de tres dígitos es igual a 28 veces la suma de sus dígitos. Si restamos este número al número obtenido escribiendo los dígitos en orden inverso obtenemos 198. Además sabemos que el dígito de las unidades es igual a la suma de los otros dos. ¿Qué número es N?**

$$\left.\begin{array}{r} 28(u+d+c)=100c+10d+u \\ 100u+10d+c-(100c+10d+u)=198 \\ d+c=u \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 72 & -18 & -27 \\ -99 & 0 & 99 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 198 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{45} & \frac{1}{99} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{99} & 1 \\ \frac{1}{45} & \frac{2}{99} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 198 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Por lo tanto el número es 224

- **Un poco de historia**

8. **En el tratado de matemática más importante de China, el que ejerció mayor influencia, titulado "Los Nueve Capítulos", o "El arte matemático en nueve secciones" (Zhui Zhang Suan Shu, s. III a.C.), en su sección octava (Faang-Chêng, que significa ecuación) se relacionan ecuaciones lineales simultáneas a partir del siguiente problema:**

   Hay tres tipos de cereal, de los cuales tres fardos del primero, dos del segundo, y uno del tercero hacen 39 medidas. Dos del primero, tres del segundo y uno del tercero hacen 34 medidas. Y uno del primero, dos del segundo y tres del tercero hacen 26 medidas. ¿Cuántas medidas de cereal son contenidas en un fardo de cada tipo?

   La estrategia de resolución que propone el autor es la siguiente:

   1^o Se crea la tabla siguiente:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

$$\left(\text{En nuestra notación: } \begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{cases}\right)$$

   2^o A continuación da instrucciones para reducir la tabla a esta forma:

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

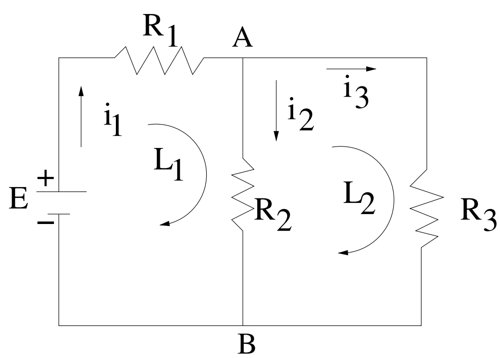
$$\left(\text{En nuestra notación: } \begin{cases} 36z=99 \\ 5y+z=24 \\ 3x+2y+z=39 \end{cases}\right)$$

   Y de ahí obtienen los valores para x, y, z. ¿Te suena de algo este método?

- **Sobre circuitos eléctricos**

La intensidad de las corrientes y las caídas de voltaje en un circuito eléctrico se rigen por las Leyes de Kirchhoff.
LEY DE KIRCHHOFF DE LA CORRIENTE: La suma algebráica de todas las corrientes en cualquier nodo es cero.
LEY DE KIRCHHOFF DEL VOLTAJE: La suma algebráica de todos los cambios de potencial en cualquier bucle es cero.

Una aplicación frecuente de estas leyes es cuando se conoce el voltaje de la fuerza electromotriz E (que por lo general es una batería o generador) y los ohmios R_j de las resistencias, y se pide calcular la intensidad i_j de las corrientes, que circulan por cada segmento del circuito.
Obsérvese que para cada elemento en el circuito hay que elegir una dirección positiva para medir la corriente que pasará a través de dicho elemento. Las elecciones se indican con flechas. Para la fuente de voltaje E se toma como positivo el sentido del polo negativo al positivo. Dicha elección condicionará también el signo de los cambios de potencial en las resistencias. El cambio de potencial a través de las resistencias será negativo cuando dicho cambio se mida en el mismo sentido que la corriente, y positivo en el caso contrario.



Ejemplo:

En los nodos A y B tenemos:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

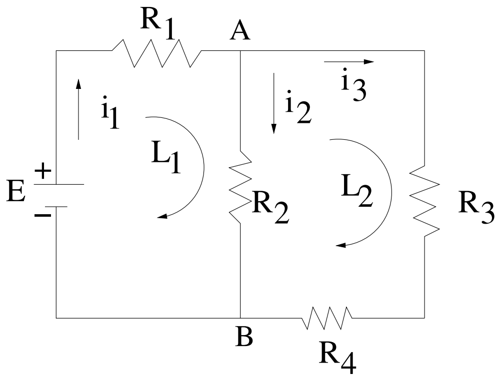
En el bucle L_1 tenemos:

$$E - R_1 i_1 - R_2 i_2 = 0$$

En el bucle L_2:

$$R_2 i_2 - R_3 i_3 = 0$$

9. **Calcular las corrientes i_1, i_2, i_3 en el circuito eléctrico de la figura de abajo si el voltaje de la batería es $E = \mathbf{6}\ V$ y las resistencias son $R_1 = 2\Omega, R_2 = 3\Omega, R_3 = 4\Omega, R_4 = 2\Omega$.**



$$\left.\begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\ E - R_1 i_1 - R_2 i_2 &= 0 \\ R_2 i_2 - R_3 i_3 - R_4 i_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\ 6 - 2i_1 - 3i_2 &= 0 \\ 3i_2 - 4i_3 - 2i_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{18} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & -\frac{5}{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, por lo tanto $i_1 = \frac{3}{2}$A, $i_2 = 1$A y $i_3 = \frac{1}{2}$ A

C. Soluciones Tema 3: Espacios Vectoriales

EJERCICIOS

- **Espacios vectoriales**

1. **Dados los vectores** $a = (1,1), b = (2,1)$ **y** $c = (1,2)$ **de** $\mathbb{R}^2$

   a) **Comprobar que forman un sistema de generadores.**

   $(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(2,1) + \gamma(1,2) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \alpha + 2\beta + \gamma \\ y = \alpha + \beta + 2\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 1 & 1 & 2 & y \end{array}\right)$,

   $rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ el sistema siempre tiene solución, por lo tanto es sistema generador.

   b) **Comprobar que son linealmente dependientes.**

   Como el rango es 2, quiere decir que sólo hay dos vectores linealmente independientes.

2. **En el espacio vectorial** $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ **sobre** $\mathbb{R}$ **se consideran las matrices:**
   $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   Prueba que son linealmente independientes.

   $\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ la solución de este sistema es $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, por lo tanto son linealmente independientes.

3. **Probar que el conjunto** $\mathcal{B} = \{(2,3), (0,2)\}$ **es una base del espacio vectorial** $\mathbb{R}^2$ **y hallar las coordenadas del vector** $(5,-1)$ **respecto de la base** $\mathcal{B}$.

   $rg \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 2$, por lo tanto son linealmente independientes, así que cualquier sistema de la forma $\alpha(2,3) + \beta(0,2) = (x,y)$ tendrá solución única, así que forman base de $\mathbb{R}^2$.

   Si $(x,y) = (5,-1) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & -\frac{17}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{17}{4} \end{array}\right) \Rightarrow$
   $C_{\mathcal{B}}[(5,-1)] = \left(\frac{5}{2}, -\frac{17}{4}\right)$

4. **Sabiendo que los vectores** $\vec{u}$, $\vec{v}$, **y** $\vec{w}$ **son linealmente independientes, probar que los vectores** $\vec{u}, \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ **también lo son.**

$\alpha\,\vec{u}+\beta(\vec{u}+\vec{v})+\gamma(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}) = \backslash vec\{0\} \Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma)\vec{u}+(\beta+\gamma)\vec{v}+\gamma\vec{w} = \backslash vec\{0\} \Rightarrow$ como los tres vectores, $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$, son linealmente independientes, eso implica que $\left.\begin{array}{r}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \beta+\gamma=0\\ \gamma=0\end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{array}\right\}$, por lo tanto $\vec{u}, \vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ son linealmente independientes.

5. **Demostrar que el conjunto de polinomios $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ es una base de $P_3[x]$, conjunto de polinomios de grado menor o igual a 3. Probar que $\mathcal{B}' = \left\{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\right\}$ también es una base de $P_3[x]$.**

   El sistema $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ siempre tiene solución única, por lo tanto el conjunto $\mathcal{B}$ es una base de $P_3[x]$.

   El sistema $\alpha + \beta(x-1) + \gamma(x-1)^2 + \delta(x-1)^3 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ da lugar al sistema de ecuaciones
   $\left.\begin{array}{r}\alpha-\beta+\gamma-\delta=a_0\\ \beta-2\gamma+3\delta=a_1\\ \gamma-3\delta=a_2\\ \delta=a_3\end{array}\right\}$, que es compatible determinado, ya que $rg\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} =$ 4, por lo tanto el sistema tendrá siempre solución única y $\mathcal{B}'$ será una base de $P_3[x]$

6. **Expresar el polinomio $2x^3 - 3x^2 + 5x - 6 \in P_3[x]$ como combinación lineal de los elementos de la base de $P_3[x]$ dada por $\{1, 1-x, x+x^2, x^2+x^3\}$.**

   $\alpha + \beta(1-x) + \gamma(x+x^2) + \delta(x^2+x^3) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 6 \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\alpha+\beta=-6\\ -\beta+\gamma=5\\ \gamma+\delta=-3\\ \delta=2\end{array}\right\} \Rightarrow$ la solución es $[\alpha = 4, \beta = -10, \gamma = -5, \delta = 2]$, por lo tanto, $2x^3 - 3x^2 + 5x - 6 = 4\cdot 1 - 10\cdot(1-x) - 5\cdot(x+x^2) + 2\cdot(x^2+x^3)$

- **Cambios de base**

7. **Demostrar que los siguientes conjuntos son base de $\mathbb{R}^4$:**

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 &= \{\vec{v}_1 = (1,1,0,0), \vec{v}_2 = (0,1,0,0), \vec{v}_3 = (0,0,1,1), \vec{v}_4 = (0,0,1,1)\}\\ \mathcal{B}_2 &= \{\vec{u}_1 = (1,2,0,0), \vec{u}_2 = (0,1,2,-1), \vec{u}_2 = (1,-1,-1,-1), \vec{u}_4 = (0,1,1,0)\}\end{aligned}$$

   Encontrar las componentes del vector $\vec{v} = 3\vec{v}_1 - \vec{v}_3 + 2\vec{v}_2$ respecto a la base $\mathcal{B}_2$ y respecto de la base canónica.

$\vec{v} = 3\vec{v}_1 - \vec{v}_3 + 2\vec{v}_2 = 3\,(1,1,0,0) - (0,0,1,1) + 2\,(0,1,0,0) = (3,5,-1,-1) \Rightarrow C_{\mathcal{B}_C}[\vec{v}] = (3,5,-1,-1)$

$$M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{\mathcal{B}_2}[\vec{v}] = M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_C} C_{\mathcal{B}_C}[\vec{v}] = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{\mathcal{B}_2}[\vec{v}] = (4,2,-1,-6)$$

8. **Demuestra que el conjuntos de polinomios $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ es una base de $P_3[x]$, conjunto de polinomios de grado menor o igual que 3. Prueba que $\mathcal{B}' = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$ también es una base de $P_3[x]$, y halla la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$. Expresa $2x^3 - 3x^2 + 5x - 6$ respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.**

   Cualquier polinomio de la forma $a + bx + cx^2 + dx^3$ se puede escribir como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$ y la solución es única.

   $a + bx + cx^2 + dx^3 = \alpha + \beta(x-1) + \gamma(x-1)^2 + \delta(x-1)^3 = \alpha - \beta + \gamma - \delta + \beta x - 2\gamma x + 3\delta x + \gamma x^2 - 3\delta x^2 + \delta x^3 \Rightarrow$

   $$\left.\begin{aligned} \alpha - \beta + \gamma - \delta &= a \\ \beta - 2\gamma + 3\delta &= b \\ \gamma - 3\delta &= c \\ \delta &= d \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & -2 & 3 & b \\ 0 & 0 & 1 & -3 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right)$$ Este sistema es compatible determinado, así que los elementos de $\mathcal{B}'$ forman una base.

9. **Para cada uno de los siguientes pares de bases de $\mathbb{R}^3$, calcula la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$:**

   a) $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (-1,1,1), (0,1,2)\}$, $\mathcal{B}' = \{(2,1,1), (0,0,1), (-1,1,1)\}$

   $$M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   $$M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}_C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}_C} M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $\mathcal{B} = \{(3,2,1),(0,-2,5),(1,1,2)\},\ \mathcal{B}' = \{(1,1,0),(-1,2,4),(2,-1,1)\}$

$$M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}_C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}_C} M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 33 & -33 & 9 \\ 2 & 13 & 6 \\ 7 & 23 & 6 \end{pmatrix}$$

10. **Sea** $\mathcal{B}_C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ **la base canónica de** $\mathbb{R}^n$ **y consideremos los vectores** $\vec{u}_1 = \vec{e}_2 - \vec{e}_1,\ \vec{u}_2 = \vec{e}_3 - \vec{e}_2, ..., \vec{u}_{n-1} = \vec{e}_n - \vec{e}_{n-1}, \vec{u}_n = -\vec{e}_n$.

a) **Demostrar que** $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ **es una base de** $\mathbb{R}^n$.

$$M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $rg(M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}}) = n$ quiere decir que los n vectores de $\mathcal{B}$ son linealmente independientes y por tanto también base.

b) **Expresar el vector** $\vec{x} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + ... + \vec{e}_n$ **como combinación lineal de los vectores** $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$.

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ \vdots \\ -(n-1) \\ -n \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = -\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 - \ldots -$$
$n\vec{u}_n$

11. **Calcular las coordenadas del vector** $p(x) = -1 + 6x - 8x^2$ **respecto de la base** $\mathcal{B} = \{1 + 2x + 2x^2, 2x - x^2, -1 - 2x\}$

$$M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \\ -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_{\mathcal{B}}[p(x)] = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \\ -6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow p(x) = -2(1 + 2x + 2x^2) + 4(2x - x^2) - 1(-1 - 2x)$$

12. **Calcular la matriz del cambio de base** M **que pasa de la base canónica de** $\mathbb{R}^3$ **a la base** $\mathcal{B}$ **que surge de girar 90**^{o} **alrededor del eje** z **y en sentido contrario a las agujas del reloj los vectores de la base canónica. Determinar las coordenadas del vector** $\vec{v} = (1, 1, 1)$ **respecto de la nueva base.**

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{\mathcal{B}}[\vec{v}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

13. **Considérense las siguientes bases de** $\mathbb{R}^2$**:**

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \{\vec{u}_1 = (1, -2), \vec{u}_2 = (3, -4)\} \\ \mathcal{B}_2 &= \{\vec{v}_1 = (1, 3), \vec{v}_2 = (3, 8)\} \end{aligned}$$

   a) **Encontrar las coordenadas de un vector arbitrario** $\vec{v} = (a, b)$ **relativas a la base** $\mathcal{B}_1$**.**

$$M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$C_{\mathcal{B}_1}[\vec{v}] = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a - \frac{3}{2}b \\ a + \frac{1}{2}b \end{pmatrix}$$

b) **Encontrar las coordenadas de un vector arbitrario $\vec{v} = (a, b)$ relativas a la base $\mathcal{B}_2$.**

$$M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$C_{\mathcal{B}_2}[\vec{v}] = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8a + 3b \\ 3a - b \end{pmatrix}$$

c) **Determinar la matriz de cambio de base $M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$ desde $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$**

$$M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} = M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_C} M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -14 & -36 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$$

d) **Determinar la matriz de cambio de base $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ desde $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$**

$$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} -14 & -36 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & -18 \\ \frac{5}{2} & 7 \end{pmatrix}$$

14. **Supóngase que los ejes x e y en el plano $\mathbb{R}^2$ se giran 45^o en el sentido contrario de las agujas del reloj, de forma que el nuevo eje x' esté a lo largo de la recta $x = y$ y el nuevo eje y' a lo largo de la recta $x = -y$. Encontrar:**

a) **La matriz de cambio de base.**

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_C} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

b) **Las nuevas coordenadas del punto $A(5, 6)$ bajo la rotación dada.**

$$C_{\mathcal{B}}[A] = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_C} C_{\mathcal{B}_C}[A] = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

15. **Considérense las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$:**

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \{\vec{u}_1 = (1, -2, 0), \vec{u}_2 = (3, -4, 0), \vec{u}_3 = (0, 0, 1)\} \\ \mathcal{B}_2 &= \{\vec{v}_1 = (1, 3, 0), \vec{v}_2 = (3, 8, 0), \vec{v}_3 = (0, 1, 1)\} \\ \mathcal{B}_3 &= \{\vec{w}_1 = (1, 0, 0), \vec{w}_2 = (1, 1, 0), \vec{w}_3 = (1, 1, 1)\} \end{aligned}$$

a) **Determinar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.**

$$M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} = M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_C} M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -36 & -3 \\ 5 & 13 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) **Determinar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_3$.**

$$M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_1} = M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_C} M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) **Determinar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_3$.**

$$M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_2} = M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_C} M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) **Calcular las coordenadas de vector $\vec{x} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ en la base $\mathcal{B}_1$ y en la base $\mathcal{B}_3$.**

$$C_{\mathcal{B}_1}[\vec{x}] = M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -36 & -3 \\ 5 & 13 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & -18 & -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & 7 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{\mathcal{B}_3}[\vec{x}] = M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e) **Calcular las coordenadas del vector $\vec{y} = 2\vec{w}_1 - \vec{w}_3$ en la base $\mathcal{B}_1$ y en la base $\mathcal{B}_2$.**

$$C_{\mathcal{B}_1}[\vec{y}] = M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$C_{\mathcal{B}_2}[\vec{y}] = M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & -5 & -8 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

16. **El vector $\vec{v}_1 = (1,3,0)$ tiene coordenadas $C_{\mathcal{B}}[\vec{v}_1] = (1,0,0)$ en la base $\mathcal{B}$, el vector $\vec{v}_2 = (3,8,0)$ tiene coordenadas $C_{\mathcal{B}}[\vec{v}_2] = (0,2,0)$ y $\vec{v}_3 = (0,1,1)$ tiene coordenadas $C_{\mathcal{B}}[\vec{v}_3] = (0,0,1)$. Hallar los tres vectores que forman la base $\mathcal{B}$.**

    $\mathcal{B} = \left\{\vec{v}_1, \frac{1}{2}\vec{v}_2, \vec{v}_3\right\} = \left\{(1,3,0), (\frac{3}{2},4,0), (0,1,1)\right\}$

- **Subespacios vectoriales**

17. **Comprueba que el conjunto de pares de números reales (a,b) cuyas componentes suman cero, es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$. Y el conjunto de pares de números reales cuyas componentes suman 5, ¿es también un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$?**

    Si $a+b=0 \Rightarrow b=-a \Rightarrow V = \{(a,-a) \in \mathbb{R}^2$ tal que $a \in \mathbb{R}\}$. Tomamos $\vec{v}_1 = (a,-a), \vec{v}_2 = (b,-b) \in V \Rightarrow \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = (\alpha a + \beta b, \alpha(-a) + \beta(-b)) = (\alpha a + \beta b, -(\alpha a + \beta b)) \in V \Rightarrow \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \in V$, así que V es un subespacio vectorial.

    Si $a+b=5 \Rightarrow b = 5-a \Rightarrow A = \{(a,5-a) \in \mathbb{R}^2$ tal que $a \in \mathbb{R}\}$.Tomamos $\vec{v}_1 = (a,5-a), \vec{v}_2 = (b,5-b) \in A \Rightarrow \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = (\alpha a + \beta b, \alpha(5-a) + \beta(5-b)) = (\alpha a + \beta b, 5(\alpha+\beta) - (\alpha a + \beta b)) \notin A$, así que A no es un subespacio vectorial.

18. **Comprobar si los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales:**

    a) $A = \{(x,2x,z)$ tal que $x,z \in \mathbb{R}\}$ **(Ecuaciones paramétricas)**
    $\vec{v}_1 = (x_1,2x_1,z_1), \vec{v}_2 = (x_2,2x_2,z_2) \in A \Rightarrow \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, 2\alpha x_1 + 2\beta x_2, \alpha z_1 + \beta z_2) \in A$, así que A es un subespacio vectorial.

    b) $B = \{(x,y,x+y)$ tal que $x,y \in \mathbb{R}\}$ **(Ecuaciones paramétricas)**
    $\vec{v}_1 = (x_1,y_1,x_1+y_1), \vec{v}_2 = (x_2,y_2,x_2+y_2) \in B \Rightarrow \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha(x_1+y_1) + \beta(x_2+y_2)) \in B$, así que B es un subespacio vectorial.

    c) $C = \{(x,y,z)$ tal que $x = z+1\}$ **(Ecuaciones cartesianas)**
    $\vec{v}_1 = (z_1+1,y_1,z_1), \vec{v}_2 = (z_2+1,y_2,z_2) \in C \Rightarrow \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = (\alpha z_1 + \alpha + \beta z_2 + \beta, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) \notin C$, así que C no es un subespacio vectorial.

19. **Estúdiese si los siguientes subconjuntos constituyen un subespacio vectorial con las operaciones inducidas.**

    a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x - y = 0\} \Rightarrow A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x = y\}$. Tomamos $\vec{v}_1 = (x_1, x_1), \vec{v}_2 = (x_2, x_2) \in A \Rightarrow \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha x_1 + \beta x_2) \in A$, así que A es un subespacio vectorial.

    b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x - y = 1\} \Rightarrow A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x = y + 1\}$. Tomamos $\vec{v}_1 = (x_1, 1 + x_1), \vec{v}_2 = (x_2, 1 + x_2) \in A \Rightarrow \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha + \alpha x_1 + \beta + \beta x_2) \notin A$, así que A no es un subespacio vectorial.

    c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } y = x^2\}$. Tomamos $\vec{v}_1 = (x_1, x_1^2), \vec{v}_2 = (x_2, x_2^2) \in A \Rightarrow \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha x_1^2 + \beta x_2^2) \notin A$, así que A no es un subespacio vectorial.

    d) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } xy = 0\}$. Tomamos $\vec{v}_1 = (x_1, y_1), \vec{v}_2 = (x_2, y_2) \in A$, por lo tanto $x_1 y_1 = 0, x_2 y_2 = 0 \Rightarrow \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$, como $(\alpha x_1 + \beta x_2)(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha^2 x_1 y_1 + \alpha\beta(x_1 y_2 + x_2 y_1) + \beta^2 x_2 y_2 = \alpha\beta(x_1 y_2 + x_2 y_1) \neq 0 \Rightarrow \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \notin A$, así que A no es un subespacio vectorial.

    e) $A = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x, y \in \mathbb{R}\}$. Tomamos $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, 0), \vec{v}_2 = (x_2, y_2, 0) \in A \Rightarrow \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, 0) \in A$, así que A es un subespacio vectorial.

    f) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x + y + z = 0\} \Rightarrow A = \{(x, y, -x - y) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x, y \in \mathbb{R}\}$. Tomamos $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, -x_1 - y_1), \vec{v}_2 = (x_2, y_2, -x_2 - y_2) \in A \Rightarrow \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, -\alpha(x_1 + y_1) - \beta(x_2 + y_2)) \in A$, así que A es un subespacio vectorial.

    g) $A = \{(x, y, -y, x) \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } x, y \in \mathbb{R}\}$. Tomamos $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, -y_1, x_1), \vec{v}_2 = (x_2, y_2, -y_2, x_2) \in A \Rightarrow \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, -\alpha y_1 - \beta y_2, x_1 + x_2) \in A$, así que A es un subespacio vectorial.

    h) $A = \{M \in \mathcal{M}_{n\times n} \text{ tal que } tr(M) = 0\}$**, donde** $tr(M)$ **indica la suma de los elementos de la diagonal principal de** M**.**

    Tomamos $M_1 = (a_{ij}), M_2 = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n} \Rightarrow tr(M_1) = tr(M_2) = 0 \Rightarrow$
    $$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = 0 \Rightarrow \alpha M_1 + \beta M_2 = (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij}) \Rightarrow$$
    $$tr(\alpha M_1 + \beta M_2) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha a_{ii} + \beta b_{ii}) = \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \beta\sum_{i=1}^{n} b_{ii} = 0,$$ por lo tanto $\alpha M_1 + \beta M_2 \in A$, así que A es un subespacio vectorial.

20. **Sea el sistema** $S = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ **con** $\vec{u} = (2,1,3)$**,** $\vec{v} = (-2,1,4)$ **obtener las ecuaciones paramétricas y cartesianas del subespacio engendrado por** S**.**

$V_S = \{(2a-2b, a+b, 3a+4b) \in \mathbb{R}^3$ tal que $a, b \in \mathbb{R}\}$, son las ecuaciones paramétricas.

$\begin{vmatrix} 2 & -2 & x \\ 1 & 1 & y \\ 3 & 4 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 14y + 4z = 0 \Rightarrow V_S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $x - 14y + 4z = 0\}$, son las ecuaciones cartesianas.

21. **En el espacio vectorial de $\mathbb{R}^4$, determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales:**

    a) $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)$ tal que $x_3 \cdot x_4 = 0\}$ No es subespacio vectorial porque la condición no es lineal en las coordenadas

    b) $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)$ tal que $x_3 + x_4 = 0\}$ Es subespacio vectorial ya que si tomamos $\vec{v}_1 = (x_1, x_2, x_3, -x_3), \vec{v}_2 = (y_1, y_2, y_3, -y_3) \in B \Rightarrow \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3, -\alpha x_3 - \beta y_3) \in B$

    c) $C = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)$ tal que $x_3 + x_4 = 1\}$ No es subespacio vectorial ya que el elemento $(0, 0, 0, 0) \notin C$

22. **Demostrar que los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:**

    a) $A = \{(x, y, z, -x)$ tal que $x, y, z \in \mathbb{R}\}$
    Tomamos $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1, -x_1), \vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2, -x_2) \in A \Rightarrow \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2, -\alpha x_1 - \beta x_2) \in A$, por lo tanto es un subespacio vectorial.

    b) $B = \{(3y, y, x+y, x)$ tal que $x, y \in \mathbb{R}\}$
    Tomamos $\vec{v}_1 = (3y_1, y_1, x_1 + y_1, x_1), \vec{v}_2 = (3y_2, y_2, x_2 + y_2, x_2) \in B \Rightarrow \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = (3\alpha y_1 + 3\beta y_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha(x_1 + y_1) + \beta(x_2 + y_2), \alpha x_1 + \beta x_2) \in B$, por lo tanto es un subespacio vectorial.

    c) $C = \{(x, 2x, 3x, 4x)$ tal que $x \in \mathbb{R}\}$
    Tomamos $\vec{v}_1 = (x_1, 2x_1, 3x_1, 4x_1), \vec{v}_2 = (x_2, 2x_2, 3x_2, 4x_2) \in C \Rightarrow \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, 2\alpha x_1 + 2\beta x_2, 3\alpha x_1 + 3\beta x_2, 4\alpha x_1 + 4\beta x_2) \in C$, por lo tanto es un subespacio vectorial.

23. **Demostrar que el conjunto de matrices de la forma:**

$$\begin{pmatrix} a-3b & 4b \\ -4b & a+3b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}$. Hallar una base de este subespacio y su dimensión.

Sea V el subespacio formado por las matrices de la forma
$\left\{\begin{pmatrix} a-3b & 4b \\ -4b & a+3b \end{pmatrix} \text{ tal que } a,b\in\mathbb{R}\right\} = V.$

Tomamos $A = \begin{pmatrix} a-3b & 4b \\ -4b & a+3b \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c-3d & 4d \\ -4d & c+3d \end{pmatrix} \in V \Rightarrow \alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} \alpha a+\beta c-3(\alpha b+\beta d) & 4(\alpha b+\beta d) \\ -4(\alpha b+\beta d) & \alpha a+\beta c+3(\alpha b+\beta d) \end{pmatrix} \in V$, por lo tanto V es subespacio vectorial.

Como $\begin{pmatrix} a-3b & 4b \\ -4b & a+3b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{B}_V = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\right\}$

Por lo tanto $\dim(V) = 2$

24. **Sea el subespacio vectorial de** $\mathbb{R}^4$, $V = \{(x,y,z,t) \text{ tal que } x+y-2t=0, x-y-z=0\}$ **calcular la dimensión, una base y las ecuaciones paramétricas.**

$$\left.\begin{array}{r} x+y-2t=0 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y-2t=0 \\ -2y-z+2t=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y-2t=0 \\ y+\frac{1}{2}z-t=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x-\frac{1}{2}z-t=0 \\ y+\frac{1}{2}z-t=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x=\alpha+\beta \\ y=\beta-\alpha \\ z=2\alpha \\ t=\beta \end{array}\right\}$$

Por lo tanto las ecuaciones paramétricas son $V = \{(\alpha+\beta, \beta-\alpha, 2\alpha, \beta) \text{ tal que } \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$

Una base será $\mathcal{B}_V = \{(1,-1,2,0),(1,1,0,1)\}$, por lo tanto $\dim(V) = 2$

25. **Sea el subespacio vectorial** $V = \{(0,a,b,a+2b) \text{ tal que } a,b\in\mathbb{R}\}$. **Determinar la dimensión, una base y las ecuaciones cartesianas del subespacio vectorial.**

Una base será $\mathcal{B}_V = \{(0,1,0,1),(0,0,1,2)\}$, por lo tanto $\dim(V) = 2$

Para obtener las ecuaciones paramétricas necesitamos que el sistema $\left.\begin{array}{r} 0=x \\ a=y \\ b=z \\ a+2b=t \end{array}\right\}$ tenga infinitas soluciones con dos parámetros libres, por lo tanto la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ 1 & 2 & t \end{pmatrix}$ tiene que tener rango 2, por lo tanto $\begin{vmatrix} 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ 1 & 2 & t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x = 0, t-y-2z = 0,$ por lo tanto $V = \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \text{ tal que } x=0, t-y-2z=0\}$

26. **Determinar la dimensión, una base y las ecuaciones paramétricas y cartesianas del subespacio vectorial engendrado por los vectores** $a = (1,2,0,3)\,, b = (3,1,-1,-1)\,, c = (-1,3,1,7)$ **y** $d = (4,3,-1,2)$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 7 & 2 \end{pmatrix} = 2, \text{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ y}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_4 - 3F_1 \\ F_2 - 2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -10 & 10 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 7 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -10 & 10 & -10 \end{pmatrix} = 2, \text{ por lo tanto } \dim(V) = 2$$

Como a y b son linealmente independientes, los podemos tomar como base del subespacio vectorial $\mathcal{B}_V = \{(1,2,0,3),(3,1,-1,-1)\}$

Las ecuaciones paramétricas son $V = \{(a+3b, 2a+b, -b, 3a-b) \in \mathbb{R}^4$ tal que $a,b \in \mathbb{R}\}$

Las ecuaciones cartesianas las podemos obtener sabiendo que el sistema $\left.\begin{aligned} a+3b &= x \\ 2a+b &= y \\ -b &= z \\ 3a-b &= t \end{aligned}\right\}$ debe ser compatible determinado con dos parámetros libres, por lo tanto $rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 1 & y \\ 0 & -1 & z \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix} =$

$3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 1 & y \\ 0 & -1 & z \end{vmatrix} = y-2x-5z = 0, \begin{vmatrix} 1 & 3 & y \\ 2 & 1 & z \\ 3 & -1 & t \end{vmatrix} = -x+2y-t = 0$, así que las ecuaciones cartesianas son $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tal que $y-2x-5z = 0, -x+2y-t = 0\}$

27. **Determinar a y b para que el vector (1,0,a,b) pertenezca al subespacio engendrado por (1,4,-5,2) y (1,2,3,-1).**

$$\alpha(1,4,-5,2) + \beta(1,2,3,-1) = (1,0,a,b) \Rightarrow \left.\begin{aligned} \alpha+\beta &= 1 \\ 4\alpha+2\beta &= 0 \\ -5\alpha+3\beta &= a \\ 2\alpha-\beta &= b \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} \alpha-2\alpha &= 1 \\ 2\alpha &= -\beta \\ -5\alpha+3\beta &= a \\ 2\alpha-\beta &= b \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}\alpha=-1\\ \beta=2\\ -5\alpha+3\beta=a\\ 2\alpha-\beta=b\end{array}\right\}\left.\begin{array}{r}\alpha=-1\\ \beta=2\\ a=11\\ b=-4\end{array}\right\}\Rightarrow(1,0,a,b)=(1,0,11,-4)$$

28. **Dados los subespacios vectoriales** F, **engendrado por los vectores** $\{(1,0,2),(2,0,4)\}$ **y** G **determinado por las ecuaciones** $2x+y+z=0$, $x-y+2z=0$. **Hallar la dimensión, una base y las ecuaciones paramétricas y cartesianas de los subespacios** $F, G, F\cap G$ **y** $F+G$.

$rg\begin{pmatrix}1&2\\0&0\\2&4\end{pmatrix}=1\Rightarrow\dim(F)=1\Rightarrow\mathcal{B}_F=\{(1,0,2)\}\Rightarrow F=\{(a,0,2a)\in\mathbb{R}^3\text{ tal que }a\in\mathbb{R}\}=$
$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\text{ tal que }y=0,z=2x\}$

$\left.\begin{array}{r}2x+y+z=0\\ x-y+2z=0\end{array}\right\}\left.\begin{array}{r}2x+y+z=0\\ 3x+3z=0\end{array}\right\}\left.\begin{array}{r}2x+y-x=0\\ x=-z\end{array}\right\}\left.\begin{array}{r}x=-y\\ x=-z\end{array}\right\}\Rightarrow\mathcal{B}_G=\{(1,-1,-1)\}\Rightarrow$
$\dim(G)=1\Rightarrow$

$G=\{(a,-a,-a)\in\mathbb{R}^3\text{ tal que }a\in\mathbb{R}\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\text{ tal que }x+y=0,x+z=0\}$

$rg\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\2&-1\end{pmatrix}=2\Rightarrow\dim(F+G)=2\Rightarrow F+G=\{(a+b,-b,2a-b)\in\mathbb{R}^3\text{ tal que }a,b\in\mathbb{R}\}\Rightarrow$
$\mathcal{B}_{F+G}=\{(1,0,2),(1,-1,-1)\}$

Como $F+G$ tiene que ser de rango 2, tendremos que $\begin{vmatrix}1&1&x\\0&-1&y\\2&-1&z\end{vmatrix}=2x+3y-z=0\Rightarrow$
$F+G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\text{ tal que }2x+3y-z=0\}$

Como $\dim(F)+\dim(G)=\dim(F+G)+\dim(F\cap G)$ y tenemos que $\dim(F)=\dim(G)=1,\dim(F+G)=2\Rightarrow\dim(F\cap G)=0\Rightarrow F\cap G=\{(0,0,0)\}$

29. **Consideremos los siguientes subespacios de** $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}F_1&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\text{ tal que }z=0\right\}\\ F_2&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\text{ tal que }x=y=0\right\}\\ F_3&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\text{ tal que }x=0,y=z\right\}\end{aligned}$$

a) **Probar que** $\mathbb{R}^3=F_1+F_2+F_3$.
Las bases de los subespacios son $\mathcal{B}_{F_1}=\{(1,0,0),(0,1,0)\},\mathcal{B}_{F_2}=\{(0,0,1)\},\mathcal{B}_{F_3}=\{(0,1,1)\}$

Como $rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \dim(F_1 + F_2 + F_3) = 3 \Rightarrow F_1 + F_2 + F_3 = \mathbb{R}^3$

b) **Probar que** $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \{\vec{0}\}$ **y también que** $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$, $F_1 \cap F_3 = \{\vec{0}\}$ **y** $F_2 \cap F_3 = \{\vec{0}\}$.

$F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } z = 0, x = y = 0, x = 0, y = z\} =$
$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que }, x = y = z = 0\} = \{\vec{0}\}$
$F_1 \cap F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } z = 0, x = y = 0\} = \{\vec{0}\}$
$F_1 \cap F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } z = 0, x = 0, y = z\} = \{\vec{0}\}$
$F_2 \cap F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x = y = 0, x = 0, y = z\} = \{\vec{0}\}$

c) **Buscar dos descomposiciones diferentes para** $\vec{0}$ **de la forma** $\vec{0} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ **con** $\vec{v}_1 \in F_1$**,** $\vec{v}_2 \in F_2$, $\vec{v}_3 \in F_3$ **(con lo que se demostrará que** $\mathbb{R}^3$ **no es suma directa de** F_1, F_2 **y** F_3.

Por ejemplo, $\vec{0} = (0, 1, 0) + (0, 0, 1) + (0, -1, -1)$, con $(0, 1, 0) \in F_1, (0, 0, 1) \in F_2, (0, -1, -1) \in F_3$. Por otro lado, también podemos escribir $\vec{0} = (0, -1, 0) + (0, 0, -1) + (0, 1, 1)$, con $(0, -1, 0) \in F_1, (0, 0, -1) \in F_2, (0, 1, 1) \in F_3$

d) **Comprobar (con la misma finalidad) que** $(F_1 + F_2) \cap F_3 \neq \{\vec{0}\}$.

$\mathcal{B}_{F_1+F_2} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ya que $rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$, por lo tanto $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3 \Rightarrow (F_1 + F_2) \cap F_3 = \mathbb{R}^3 \cap F_3 = F_3 \neq \{\vec{0}\}$

30. **En** $\mathbb{R}^4$ **se consideran los subespacios** W_1 **y** W_2 **engendrados, respectivamente, por los sistemas de vectores:**

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(1, 0, 1, 0\}, (0, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1)\} \\ S_2 &= \{(1, 0, 0, 0), (2, 1, 0, 1), (5, 1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Hallar:

a) **Bases y dimensión de** W_1 **y** W_2.

$rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \mathcal{B}_{W_1} = \{(1, 0, 1, 0\}, (0, 1, 0, 1)\} \Rightarrow \dim(W_1) = 2 \Rightarrow W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } x - z = 0, y - t = 0\}$

$rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \mathcal{B}_{W_2} = \{(1,0,0,0\},(2,1,0,1)\} \Rightarrow \dim(W_2) = 2 \Rightarrow W_2 =$
$\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } z = 0, y - t = 0\}$

b) **Ecuaciones y base de W_1+W_2.**

$rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \dim(W_1 + W_2) = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathcal{B}_{W_1+W_2} = \{(1,0,1,0\},(0,1,0,1),(1,0,0,0)\} \Rightarrow$
$\Rightarrow W_1 + W_2 = \{(a+c,b,a,b) \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } a,b,c \in \mathbb{R}\} =$
$= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } y - t = 0\}$

c) **Ecuaciones y base de $W_1 \cap W_2$.**

$W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } x - z = 0, y - t = 0, z = 0\} =$
$= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } y - t = 0, x = z = 0\} = \{(0,a,0,a) \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } a \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$
$\mathcal{B}_{W_1 \cap W_2} = \{(0,1,0,1)\}$

31. **Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$**

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x + y = 0\} \\ W_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } y - z = 0\} \end{aligned}$$

a) **Calcular $W_1 \cap W_2$ y W_1+W_2.**

$W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x + y = 0, y - z = 0\} =$
$= \{(a,-a,-a) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } a \in \mathbb{R}\}$
$W_1 = \{(a,-a,b) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } a,b \in \mathbb{R}\}, W_2 = \{(a,b,b) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } a,b \in \mathbb{R}\}$
$rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \dim(W_1 + W_2) = 3 \Rightarrow W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$

b) **Comprobar si se verifica $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^3$.**

Se cumple que $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$, pero $W_1 \cap W_2 \neq \{\vec{0}\}$ por lo tanto no son suma directa.

D. Soluciones Tema 4: Aplicaciones Lineales

EJERCICIOS

- **Aplicaciones Lineales**

1. **Determina cuáles de las siguientes aplicaciones $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ son transformaciones lineales:**

   (a) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1, x_3)$; **(b)** $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 1, x_2 + 2, 0)$;
   (c) $f(x_1, x_2, x_3) = (0, x_1 + x_2, 0)$; **(d)** $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2, x_3, x_1)$.

   (a) $af(x_1, x_2, x_3)+bf(y_1, y_2, y_3) = a(x_2, x_1, x_3)+b(y_2, y_1, y_3) = (ax_2+by_2, ax_1+by_1, ax_3+by_3) = f(ax_1 + by_1, ax_2 + by_2, ax_3 + by_3) \Rightarrow$ es aplicación lineal

   (b) $f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3) = (x_1 + 1, x_2 + 2, 0) + (y_1 + 1, y_2 + 2, 0) = (x_1 + y_1 + 2, x_2 + y_2 + 4, 0) \neq f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 2, 0) \Rightarrow$ no es aplicación lineal

   (c) $af(x_1, x_2, x_3) + bf(y_1, y_2, y_3) = a(0, x_1 + x_{2,}0) + b(0, y_1 + y_{2,}0) = (0, ax_1 + by_1 + ax_2 + by_2, 0) = f(ax_1 + by_1, ax_2 + by_2, ax_3 + by_3) \Rightarrow$ es aplicación lineal

   (d) $f(x_1, x_2, x_3)+f(y_1, y_2, y_3) = (x_1x_2, x_3, x_1)+(y_1y_2, y_3, y_1) = (x_1x_2+y_1y_2, x_3+y_3, x_1+y_1) \neq f(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) = ((x_1+y_1)(x_2+y_2), x_3+y_3, x_1+y_1) \Rightarrow$ no es aplicación lineal

2. **Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 2) = (2, 3)$ y $f(0, 1) = (1, 4)$. Halla $f(x, y)$.**

   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} a + 2b = 2 \\ c + 2d = 3 \end{array}\right\}$$

   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} b = 1 \\ d = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} a + 2 = 2 \\ c + 8 = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} a = 0 \\ c = -5 \end{array}\right\}$$

   La matriz de la aplicación es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow C[f(x, y)] =$

   $$= A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -5x + 4y \end{pmatrix} \Rightarrow f(x, y) = (y, -5x + 4y)$$

3. **Estudiar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales entre los espacios vectoriales dados:**

   a) $f(x, y, z) = (x + y, z)$ Sí, ya que $af(x_1, y_1, z_1) + bf(x_2, y_2, z_2) = a(x_1 + y_1, z_1) + b(x_2 + y_2, z_2) = (ax_1 + bx_2 + ay_1 + by_2, az_1 + bz_2) = f(ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2, az_1 + bz_2)$

b) $f(x,y)=(x+y,0)$ Sí, ya que $af(x_1,y_1)+bf(x_2,y_2)=a(x_1+y_1,0)+b(x_2+y_2,0)=(ax_1+bx_2+ay_1+by_2,0)=f(ax_1+bx_2,ay_1+by_2)$

c) $f(x,y)=(x,y+2)$ No, ya que $f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)=(x_1,y_1+2)+(x_2,y_2+2)=(x_1+x_2,y_1+y_2+4)\neq f(x_1+x_2,y_1+y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2+2)$

d) $f:\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})\qquad f(A)=AB$ **donde** $B=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ Sí, ya que $af(A)+bf(A')=aAB+bA'B=(aA+bA')B=f(aA+bA')$

e) $f:\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$**,** $\quad f(A)=A+B$ **donde** $B\in\mathcal{M}_{2\times 2}$ **es fija.** No, ya que $f(A)+f(A')=A+B+A'+B=A+A'+2B\neq f(A+A')=A+A'+B$

f) $f:\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$**,** $\quad f(A)=AB-BA$ **donde** $B\in\mathcal{M}_{2\times 2}$ **es fija.** Sí., ya que $af(A)+bf(A')=aAB-aBA+bA'B-bBA'=(aA+bA')B-B(aA+bA')=f(aA+bA')$

g) $f:P_n[x]\to P_n[x]$**,** $\quad f(p(x))=p(x+1)$**.** Sí, ya que $af(p(x))+bf(q(x))=ap(x+1)+bq(x+1)=f(ap(x)+bq(x))$

h) $f:P_n[x]\to P_n[x]$**,** $\quad f(p(x))=p(x)+1$**.** No, ya que $f(p(x))+f(q(x))=p(x)+1+q(x)+1=p(x)+q(x)+2\neq f(p(x)+q(x)))=p(x)+q(x)+1$

4. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ **es lineal, y se tiene que** $f(1,2)=(-1,0,2)$ **y** $f(2,1)=(0,2,-1)$. **Halla** $f(3,3)$ **y** $f(0,-1)$.

   Como $(3,3)=(1,2)+(2,1)\Rightarrow f(3,3)=f(1,2)+f(2,1)=(-1,0,2)+(0,2,-1)\Rightarrow f(3,3)=(-1,2,1)$

   Como $(0,-1)=a(1,2)+b(2,1)\Rightarrow \left.\begin{array}{c}a+2b=0\\2a+b=-1\end{array}\right\}\Rightarrow a=-\frac{2}{3}, b=\frac{1}{3}\Rightarrow f(0,-1)=af(1,2)+b(2,1)=-\frac{2}{3}(-1,0,2)+\frac{1}{3}(0,2,-1)\Rightarrow f(0,-1)=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3}\end{pmatrix}$

5. **Dadas** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3, f(a,b)=(a,a+b,b)$, **y** $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2, g(a,b,c)=(a+b,c)$**, calcular** $f\circ g$ **y** $g\circ f$

   $(f\circ g)(a,b,c)=f(g(a,b,c))=f(a+b,c)=(a+b,a+b+c,c)$

   $(g\circ f)(a,b)=g(f(a,b))=g(a,a+b,b)=(2a+b,b)$

6. **Sea** $f:V\to W$ **una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales** V **y** W**. Demostrar las siguientes proposiciones:**

   a) **La imagen del elemento neutro de** V **mediante** f **es el elemento neutro de** W**, es decir,** $f(\vec{0_V})=\vec{0_W}$**.**

   $f(\vec{0_V})=f(\vec{x}+(-\vec{x}))=f(\vec{x})+f(-\vec{x})=f(\vec{x})-f(\vec{x})=\vec{0}_W$

b) **La imagen mediante F del opuesto de un elemento $\vec{v} \in V$ es el opuesto de $f(\vec{v})$, es decir, $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$.**

$f(-\vec{v}) = f((-1)\vec{v}) = (-1)f(\vec{v}) = -f(\vec{v})$

c) **La imagen mediante f de cualquier subespacio de V es un subespacio vectorial de W.**

Suponiendo que $\{\vec{u}_i\}_{i=1}^{k}$ es una base de V, entonces cualquier vector de este subespacio se escribe como $\vec{x} = \sum_{i=1}^{k} a_i\vec{u}_i \Rightarrow f(\vec{x}) = f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\vec{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i f(\vec{u}_i)$, como $\{f(\vec{u}_i)\}_{i=1}^{k}$ es un subconjunto de vectores de W, generarán un subespacio vectorial de W.

d) **La imagen mediante una aplicación lineal de un subespacio vectorial de dimensión k es un subespacio vectorial de dimensión no superior a k.**

Por lo dicho anteriormente, el subespacio generado en W tendrá como máximo k vectores linealmente independientes ($\{f(\vec{u}_i)\}_{i=1}^{k}$), así que como máximo el subespacio generado tendrá dimensión k.

e) **Sea $\mathcal{B} = \vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ una base del espacio vectorial V y sean $\vec{w_1}$, $\vec{w_2}$,...,$\vec{w_n}$, n vectores cualesquiera del espacio vectorial W. En estas condiciones, existe una única aplicación lineal f de V a W tal que:**

$$f(\vec{e_j}) = \vec{w}_j, j = 1, 2, ..., n$$

Supongamos que hay dos aplicaciones distintas f y g, tales que $f(\vec{e_j}) = \vec{w_j}$ y $g(\vec{e_j}) = \vec{w_j}$ entonces tendremos que, por el hecho de ser aplicaciones lineales, restándoles a una la otra: $f(\vec{e_j}) - g(\vec{e_j}) = \vec{w_j} - \vec{w_j} = \vec{0} \Rightarrow (f-g)(\vec{e_j}) = \vec{0}$. Por lo tanto, para cualquier vector $\vec{x}$ de V, que podremos escribir como $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{e}_i$, tendremos que $(f-g)(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i(f-g)(\vec{e}_i) = \vec{0}$. Por lo tanto la imagen de cualquier vector de V mediante la aplicación $f-g$ es el vector nulo, y la única aplicación que hace que la imagen de cualquier vector sea $\vec{0}$ es la aplicación nula, por lo tanto $f = g$

- **Matriz de una aplicación lineal**

7. **Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y,z) = (x+y, z, x+z)$. Encontrar la matriz de f con respecto a la base canónica. Hallar la imagen mediante f de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.**

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) $V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x+y+z=0\}\}$

   $\mathcal{B}_{V_1} = \{(1,-1,0),(1,0,-1)\} \Rightarrow \mathcal{SG}_{f(V_1)} = \{f(1,-1,0), f(1,0,-1)\} = \{(0,-1,1),(1,0,0)\}$

   Como $rg \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \mathcal{B}_{f(V_1)} = \{(0,-1,1),(1,0,0)\}$

   $\dim(V_1) = 2, \dim(f(V_1)) = 2$

   b) $V_2 = \{(x,y,0) \text{ tal que } x,y \in \mathbb{R}\}$

   $\mathcal{B}_{V_2} = \{(1,0,0),(0,1,0)\} \Rightarrow \mathcal{SG}_{f(V_2)} = \{f(1,0,0), f(0,1,0)\} = \{(1,0,1),(1,1,0)\} \Rightarrow$

   como $rg \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \mathcal{B}_{f(V_2)} = \{(1,0,1),(1,1,0)\}$

   $\dim(V_2) = 2, \dim(f(V_2)) = 2$

   c) $V_3 = \{(x,y,z) = t(1,-1,1) \text{ tal que } t \in \mathbb{R}\}$

   $\mathcal{B}_{V_3} = \{(1,-1,1)\} \Rightarrow \mathcal{SG}_{f(V_3)} = \{f(1,-1,1)\} = \{(0,-1,2)\} \Rightarrow$ como $rg \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} =$

   $1 \Rightarrow \mathcal{B}_{f(V_3)} = \{(0,-1,2)\}$

   $\dim(V_3) = 1, \dim(f(V_3)) = 1$

   En cada caso indicar la dimensión del subespacio y la dimensión de su imagen mediante f.

8. **Hallar las matrices de las siguientes aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ respecto de la base canónica:**

   a) **Giro de α grados con respecto al eje z.**

   $f(1,0,0) = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0), f(0,1,0) = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0), f(0,0,1) = (0,0,1)$

   $$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) **Simetría con respecto a la recta $x = 0$, $y = 0$.**
$f(1,0,0) = (-1,0,0), f(0,1,0) = (0,-1,0), f(0,0,1) = (0,0,1)$
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) **Simetría con respecto a la recta $x = y$, $z = 0$.**
$f(1,0,0) = (0,1,0), f(0,1,0) = (1,0,0), f(0,0,1) = (0,0,-1)$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d) **Proyección sobre el plano $x - y + z = 0$.**
La proyección sobre el plano π de un vector $\vec{v}$ se expresa como $\vec{v}_\pi = \vec{v} - \frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$, donde $\vec{n}$ es un vector normal al plano π
En este caso $\vec{n} = (1,-1,1) \Rightarrow \|\vec{n}\|^2 = \left(\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}\right)^2 = 3 \Rightarrow$ tomando $\vec{v} = (x,y,z) \Rightarrow \vec{v}_\pi = (x,y,z) - \frac{x-y+z}{3}(1,-1,1)$
Así, $f(1,0,0) = (1,0,0) - \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$, $f(0,1,0) = (0,1,0) - \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $f(0,0,1) = (0,0,1) - \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$
$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e) **Proyección respecto a la recta $(x,y,z) = t(1,1,1)$.**
La proyección respecto a una recta r se expresa como $\vec{v}_r = \frac{\vec{v}\cdot\vec{d}}{\left\|\vec{d}\right\|^2}\vec{d}$, donde $\vec{d}$ es un vector director de la recta r
En este caso $\vec{d} = (1,1,1) \Rightarrow \left\|\vec{d}\right\|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3 \Rightarrow$ tomando $\vec{v} = (x,y,z) \Rightarrow \vec{v}_r = \frac{x+y+z}{3}(1,1,1)$
Así, $f(1,0,0) = \frac{1}{3}(1,1,1), f(0,1,0) = \frac{1}{3}(1,1,1), f(0,0,1) = \frac{1}{3}(1,1,1)$
$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Núcleo e imagen de una aplicación**

9. **Sea la aplicación $f : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ con $f(A) = traza(A)$.**

a) **Prueba que f es una aplicación lineal.**

$af(A)+bf(B) = a\cdot traza(A)+b\cdot traza(B) = traza(aA)+traza(bB) = traza(aA+bB) = f(aA+bB)$, por tanto es aplicación lineal

b) **Calcula el núcleo de f y da una base del mismo.**

$\ker(f) = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \text{ tal que } traza(A) = 0\} =$

$= \left\{ A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \text{ tal que } \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0 \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{B}(\ker(f)) = \left\{ \overbrace{(1,0,0,...,0,-1),(0,1,0,...,0,-1),...,(0,0,0,...1,-1)}^{n-1)} \right\}$

10. **Sea la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida como $f(x,y,z) = (x-y, x+z)$.**

a) **Probar que f es una aplicación lineal.**

$af(x_1,y_1,z_1)+bf(x_2,y_2,z_2) = a(x_1-y_1, x_1+z_1)+b(x_2-y_2, x_2+z_2) = (ax_1-ay_1, ax_1+az_1)+(bx_2-by_2, bx_2+bz_2) = (ax_1+bx_2-(ay_1+by_2), ax_1+bx_2+az_1+bz_2) = f(a(x_1,y_1,z_1)+b(x_2,y_2,z_2))$

b) **Determinar las ecuaciones paramétricas y cartesianas del núcleo y de la imagen.**

$\ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x-y=0, x+z=0\} = \{(a,a,-a) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } a \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{SG}_{img(f)} = \{(1,1),(-1,0),(0,1)\}$, como $rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 = \dim(\mathbb{R}^2) \Rightarrow img(f) = \mathbb{R}^2$

c) **Encontrar una base del núcleo y otra de la imagen.**

$\mathcal{B}_{\ker(f)} = \{(1,1,-1)\}, \mathcal{B}_{img(f)} = \{(1,0),(0,1)\}$

d) **Comprobar que se verifica el teorema núcleo-imagen (Teorema 1).**

$\dim(\ker(f)) + \dim(img(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) \Rightarrow 1+2 = 3$

e) **Clasificar f.**

Como $\dim(img(f)) = \dim(\mathbb{R}^2)$ la aplicación es suprayectiva, y como $\dim(\ker(f)) \neq 0$ la aplicación no es inyectiva.

11. **Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:**

$$f(e_1) = 3e_1 - 2e_2 + e_3, \quad f(e_2) = e_1 + e_2, \quad f(e_3) = 2e_1 - 3e_2 + e_3$$

Calcular:

a) **Matriz de la aplicación lineal.**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) **Ecuaciones de f.**

$f(x, y, z) = (3x + y + 2z, -2x + y - 3z, x + z)$

c) **Ecuaciones paramétricas y cartesianas del núcleo y de la imagen.**

$\ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } 3x + y + 2z = 0, -2x + y - 3z = 0, x + z = 0\} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} 3x + y + 2z = 0 \\ -2x + y - 3z = 0 \\ x + z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \rightleftarrows F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 3F_1]{F_2 + 2F_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x + z = 0, y - z = 0\} =$

$= \{(a, -a, -a) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } a \in \mathbb{R}\}$

Como $rg \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} < 3$ ya que $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, rg \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$

ya que $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \Rightarrow \mathcal{B}_{img(f)} = \{(3, -2, 1), (1, 1, 0)\} \Rightarrow$

$img(f) = \{(3a + b, -2a + b, a) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } a, b \in \mathbb{R}\}$

Como $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ -2 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = y - x + 5z = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow img(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } y - x + 5z = 0\}$

12. **Dadas las aplicaciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definidas por $f(x, y) = (x+y, x)$ y $g(x, y) = (2x, 3x-y)$, calcular las expresiones algebráicas y matriciales de $g \circ f$, $f \circ g$ y $f + g$.**

$(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y)) = g(x + y, x) = (2(x + y), 3(x + y) - x) = (2x + 2y, 2x + 3y)$

$(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y)) = f(2x, 3x - y) = (2x + 3x - y, 2x) = (5x - y, 2x)$

$(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y) = (x + y, x) + (2x, 3x - y) = (3x + y, 4x - y)$

También se podría calcular sabiendo que $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$A_{g\circ f} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_{f\circ g} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{f+g} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

13. **Sea** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ **la matriz de una aplicación lineal de** $\mathbb{R}^3$ **en** $\mathbb{R}^2$**. Calcular:**

   a) **Expresión algebráica de** f**.**
   $f(x,y,z) = (x-z, 2x-3y-z)$

   b) $f(-1,2,3)$**.**
   $f(-1,2,3) = (-1-3, 2\cdot(-1) - 3\cdot 2 - 3) = (-4,-11)$

   c) **Estudiar si existe algún vector** (x,y,z) **cuya imagen sea el vector** $(1,-1)$**.**
   $$\left.\begin{array}{r} x - z = 1 \\ 2x - 3y - z = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow$$
   $$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + z \\ y = 1 + \frac{z}{3} \end{array}\right.$$
   Por lo tanto, todos los vectores de la forma $(1+z, 1+\frac{z}{3}, z)$ tendrán como imagen el $(1,-1)$

   d) **Ecuaciones paramétricas y cartesianas del núcleo y de la imagen**
   $\ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x - z = 0, 2x - 3y - z = 0\} =$
   $= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x - z = 0, 3y - z = 0\} = \left\{(a, \frac{a}{3}, a) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } a \in \mathbb{R}\right\}$
   Como $rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow img(f) = \mathbb{R}^2$

   e) **Comprobar que se verifica el teorema núcleo-imagen.**
   $\dim(\ker(f)) + \dim(img(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) \Rightarrow 1 + 2 = 3$

   f) **Clasificar** f**.**
   Como $img(f) = \mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ es suprayectiva. Como $\dim(\ker(f)) = 1 \Rightarrow f$ no es inyectiva

   g) **Calcular la matriz de** f **respecto de las bases:**
   $$\begin{array}{rcl} \mathcal{B} & = & \{(1,0,1),(0,0,-1),(2,1,1)\} \text{ de } \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{B}' & = & \{(1,0),(1,1)\} \text{ de } \mathbb{R}^2 \end{array}$$

$$M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}_C} = \left(M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}_C} A_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_C} M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

14. **Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \alpha & 2 & 2 \\ 6 & 3 & \beta \end{pmatrix}$. Calsificar f según los distintos valores de α y β.**

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \alpha & 2 & 2 \\ 6 & 3 & \beta \end{vmatrix} = 3\alpha + 4\beta - \alpha\beta - 12 = -(\alpha - 4)(\beta - 3)$$

Si $\alpha \neq 4$ y $\beta \neq 3 \Rightarrow rg \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \alpha & 2 & 2 \\ 6 & 3 & \beta \end{pmatrix} = 3$, por lo tanto la aplicación f será biyectiva

Si $\alpha = 4$ ó $\beta = 3 \Rightarrow rg \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \alpha & 2 & 2 \\ 6 & 3 & \beta \end{pmatrix} < 3$, por lo tanto la aplicación f no será ni inyectiva (ya que $\dim(\ker(f)) > 0$), ni suprayectiva (ya que $\dim(img(f)) < 3$).

15. **Demostrar que si $S = \{\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_n}\}$ son linealmente independientes, entonces, $\{f(\vec{x_1}), f(\vec{x_2}), ..., f(\vec{x_n})\}$ son linealmente independientes si y sólo si f es inyectiva.**

Supongamos que $a_1 f(\vec{x_1}) + a_2 f(\vec{x_2}) + ... + a_n f(\vec{x_n}) = \vec{0} \Rightarrow f(a_1\vec{x_1} + a_2\vec{x_2} + ... + a_n\vec{x_n}) = \vec{0}$, como f es inyectiva, entonces $a_1\vec{x_1} + a_2\vec{x_2} + ... + a_n\vec{x_n} = \vec{0}$. Como $\{\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_n}\}$ son linealmente independientes, entonces $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$, entonces $\{f(\vec{x_1}), f(\vec{x_2}), ..., f(\vec{x_n})\}$ son linealmente independientes.

16. **Describir el núcleo y la imagen de las siguientes aplicaciones lineales, indicando si son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas:**

    a) $M_B : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 1}$ **donde** $M_B(A) = AB$ **con** $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$M_B(A) = AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-b \\ c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \Rightarrow$
$\ker(M_B) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2} \text{ tal que } a, c \in \mathbb{R} \right\}$

Como la matriz de la aplicación es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, como $rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$ $2 \Rightarrow \dim(img(M_B)) = 2 \Rightarrow img(M_B) = \mathcal{M}_{2\times 1}$

También se podía haber averiguado sabiendo que $\dim(\ker(M_B)) = 2, \dim(\mathcal{M}_{2\times 2}) = 4 \Rightarrow \dim(img(M_B)) = 4 - 2 = 2 \Rightarrow img(M_B) = \mathcal{M}_{2\times 1}$

Como $\dim(\ker(M_B)) = 2$, entonces la aplicación no es inyectiva. Como $img(M_B) = \mathcal{M}_{2\times 1}$ la aplicación es sobreyectiva.

b) **La aplicación derivación de $P_n[x]$ en $P_{n-1}[x]$.**

$f(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + a_1$

$\ker(f) = \{p(x) = a_0 \in P_n[x] \text{ tal que } a_0 \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim(\ker(f)) = 1$

Como $\dim(P_n[x]) = n \Rightarrow \dim(img(f)) = n - 1 \Rightarrow img(f) = P_{n-1}[x]$

Como $\dim(\ker(f)) = 1$, entonces la aplicación no es inyectiva. Como $img(f) = P_{n-1}[x]$ la aplicación es sobreyectiva.

17. **Clasifica el endomorfismo $f(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$. Encuentra las ecuaciones algebráicas de f^{-1}, f^2 en los casos en que sea posible.**

La matriz de la aplicación f es $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

La matriz de la aplicación f^{-1} es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$
$f^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x}{2}, 2x - y, 7x - 3y - z\right)$

La matriz de la aplicación f^2 es $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 14 & -6 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f^2(x, y, z) =$
$(4x, 4x + y, 14x - 6y + z)$

- **Cambios de base para aplicaciones lineales**

18. **Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por**

$$f(u_1, u_2, u_3) = (u_1 - u_2 + 2u_3, u_1 + 3u_2)$$

y las bases $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,-1),(2,1,0),(0,1,1)\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(-2,1),(1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Calcular:

a) **Matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.**

$$A_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

b) **Matriz asociada a f respecto de la base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ y la canónica de $\mathbb{R}^2$.**

$$M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1} = A_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_C} M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

c) **Matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y la base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^2$.**

$$M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_C} = \left(M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_2}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_C} = M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_C} A_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_C} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

d) **Matriz asociada a f respecto de la base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ y la base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^2$.**

$$A_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} = M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_C} A_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_C} M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -6 & -4 \\ -1 & -11 & -7 \end{pmatrix}$$

19. **Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por**

$$f(u_1, u_2, u_3) = (u_1 - u_2 + u_3, 4u_2 - u_3, u_1 + u_2 + 5u_3)$$

$\mathcal{B} = \{(1,2,1),(3,1,0),(-1,3,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y el vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ de coordenadas (-1,1,1) en la base $\mathcal{B}$. Calcular:

a) **Las coordenadas del vector $f(\vec{v})$ en la base canónica.**

La matriz de la aplicación respecto de la base canónica es $A_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Las matrices de cambio de base son $M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_C} = \left(M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}}\right)^{-1} =$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -1 \end{pmatrix}$

Por lo tanto $A_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_C} M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 7 & 4 & 11 \\ 8 & 4 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$C_{\mathcal{B}_C}[f(\vec{v})] = A_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}} C_{\mathcal{B}}[\vec{v}] = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 7 & 4 & 11 \\ 8 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) **Las coordenadas de $f(\vec{v})$ respecto de la base $\mathcal{B}$.**

Las coordenadas de $f(\vec{v})$ respecto de la base $\mathcal{B}$ será $C_{\mathcal{B}}[f(\vec{v})] = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_C} C_{\mathcal{B}_C}[f(\vec{v})] =$
$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

20. **Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal tal que**

$$f(3,-5) = (1,1,1,1), \quad f(-1,2) = (2,1,0,-2)$$

Calcular:

a) **Hallar la expresión de la aplicación f, es decir, dado un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ determinar $f(\vec{v})$.**

Considerando como base $\mathcal{B} = \{(3,-5),(-1,2)\}$, la matriz de la aplicación en la base $\mathcal{B}$ inicial y en la base canónica final será

$$A_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Las matrices de cambio de base serán $M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_C} = \left(M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}}\right)^{-1} =$
$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

Por lo tanto, $A_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_C} = A_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 7 & 4 \\ 2 & 1 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$

Así que, si tomamos $\vec{v} = (x, y) \Rightarrow C_{\mathcal{B}_C}[f(\vec{v})] = A_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_C} C_{\mathcal{B}_C}[\vec{v}] = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 7 & 4 \\ 2 & 1 \\ -8 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 12x + 7y \\ 7x + 4y \\ 2x + y \\ -8x - 5y \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\vec{v}) = (12x + 7y, 7x + 4y, 2x + y, -8x - 5y)$

b) **Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$.**

$A_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_C} = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 7 & 4 \\ 2 & 1 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$

c) **Determinar el subespacio imagen de la aplicación lineal f y su dimensión.**
Como $f(1,0) = (12, 7, 2, -8)\,, f(0,1) = (7, 4, 1, -5) \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathcal{SG}_{img(f)} = \{(12, 7, 2, -8)\,, (7, 4, 1, -5)\}$, como son dos vectores linealmente independientes, serán una base del subespacio imagen. Por lo tanto $\dim(img(f)) = 2$
$img(f) = \{(12a + 7b, 7a + 4b, 2a + b, -8a - 5b) \in \mathbb{R}^4$ tal que $a, b \in \mathbb{R}\}$

21. **Sea la aplicación f definida por:**

$f(\vec{u_1}) = f(1, 0, 0) = (1, 2)$
$f(\vec{u_2}) = f(1, 1, 0) = (1, 1)$
$f(\vec{u_3}) = f(1, 1, 1) = (0, 2)$

donde se considera la siguiente base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$. Halla:

a) **Matriz asociada a f respecto de las bases $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ y la canónica de $\mathbb{R}^2$.**

$A_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$b)$ **Matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.**

Como $M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}^{\mathcal{B}_C} = \left(M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_C} = A_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}} M_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}^{\mathcal{B}_C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

22. **Se define una aplicación f por:**

$f(\vec{e_1}) = f(1,0) = (1,2,0,-1)$
$f(\vec{e_2}) = f(0,1) = (0,1,-1,0)$

Sabiendo que las coordenadas de $f(\vec{e_1})$ y $f(\vec{e_2})$ están referidas a la base $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4} = \{\vec{v_1} = (1,0,0,0), \vec{v_2} = (1,1,0,0), \vec{v_3} = (1,1,1,0), \vec{v_4} = (1,1,1,1)\}$. Calcula:

$a)$ **Matriz asociada a f referida a la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}$.**

$$A_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}}^{\mathcal{B}_C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$b)$ **Matriz asociada a f referida a las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$.**

La matriz de cambiode base es $M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, por lo tanto:

$$A_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_C} = M_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}} A_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}}^{\mathcal{B}_C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$c)$ **$f(1,-2)$ en las canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$.**

$$C_{\mathcal{B}_C}[f(1,-2)] = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow f(1,-2) = (2,1,1,-1)$$

E. Soluciones Tema 5: Diagonalización de Endomorfismos. Forma canónica de Jordan

EJERCICIOS

- **Diagonalización de endomorfismos**

1. **Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$. Hallar los valores propios y vectores propios. Razonar si es diagonalizable y obtener la matriz de paso que permite diagonalizarla.**

   $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 3 & 13-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 15\lambda + 14 = (\lambda-1)(\lambda-14) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 14 \end{cases}$ son los autovalores de la matriz, como hemos obtenido dos diferentes y la matriz es 2×2 será diagonalizable.

   Vamos a calcular los autovectores:

   Si $\lambda_1 = 1 \Rightarrow (A-I)\vec{v}_1 = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x+4y=0 \Rightarrow \vec{v}_1 = (4,-1)\alpha$

   Si $\lambda_2 = 13 \Rightarrow (A-14I)\vec{v}_1 = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -12 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 3x-y=0 \Rightarrow$ $\vec{v}_2 = (1,3)\beta$

   La matriz diagonal será $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$ y la matriz de paso $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

2. **Hallar los valores propios y vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$**

   $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1-\lambda & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda - 8\lambda^2 + \lambda^4 + 3 =$

   $(\lambda+3)(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -3 \\ \lambda_3 = 1+\sqrt{2} \\ \lambda_4 = 1-\sqrt{2} \end{cases}$ son los autovalores.

   Los autovectores serán:

Si $\lambda_1 = 1 \Rightarrow (A - I)\,\vec{v}_1 = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 5 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4+F_3]{F_1 \rightleftarrows F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+5F_3]{F_1+6F_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 26 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_3]{\frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{v}_1 = (-13, -24, 3, 1)\alpha$$

Si $\lambda_2 = -3 \Rightarrow (A + 3I)\,\vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 5 & 9 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4-F_3]{\substack{F_1 \rightleftarrows \frac{1}{2}F_2 \\ \frac{1}{3}F_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-4F_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1-3F_3]{\substack{\frac{-1}{7}F_2 \\ F_2-F_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-2F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \vec{v}_2 = (-1, 0, -1, 1)\alpha$

Si $\lambda_3 = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow \left(A - (1 + \sqrt{2})I\right)\vec{v}_3 = \vec{0} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 5 & 9 \\ 2 & -\sqrt{2} & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -1-\sqrt{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -\sqrt{2} & 1 & 5 & 9 & 0 \\ 2 & -\sqrt{2} & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\sqrt{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3-\sqrt{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{-1}{\sqrt{2}}(F_3+F_4)]{\substack{\sqrt{2}F_1 \\ F_1+F_2}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 5\sqrt{2}+6 & 9\sqrt{2}+8 & 0 \\ 2 & -\sqrt{2} & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3-\sqrt{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4-F_3]{\substack{F_1 \rightleftarrows F_2 \\ F_2-(5\sqrt{2}+6)F_3}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -\sqrt{2} & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\sqrt{2}+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4-\sqrt{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{F_4}{-4-\sqrt{2}}-F_3]{\substack{F_2 \rightleftarrows F_3 \\ \frac{F_3}{4\sqrt{2}+2}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -\sqrt{2} & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1-6F_2-8F_3]{F_2-F_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \vec{v}_3 = (1, \sqrt{2}, 0, 0)\alpha$

Si $\lambda_4 = 1-\sqrt{2} \Rightarrow \left(A-(1-\sqrt{2})I\right)\vec{v}_4 = \vec{0} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 5 & 9 \\ 2 & \sqrt{2} & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -1+\sqrt{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3+\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \sqrt{2} & 1 & 5 & 9 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1+\sqrt{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3+\sqrt{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{\sqrt{2}}(F_3+F_4)]{\substack{\sqrt{2}F_1 \\ F_1-F_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 5\sqrt{2}-6 & 9\sqrt{2}-8 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3+\sqrt{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_4-F_3]{\substack{F_1 \rightleftarrows F_2 \\ F_2-(5\sqrt{2}-6)F_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & \sqrt{2} & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\sqrt{2}-2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4+\sqrt{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{F_4}{-4+\sqrt{2}}-F_3]{\substack{F_2 \rightleftarrows F_3 \\ \frac{F_3}{4\sqrt{2}-2}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & \sqrt{2} & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1-6F_2-8F_3]{F_2-F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \vec{v}_4 = (1, -\sqrt{2}, 0, 0)\alpha$

3. **Sea** $A = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$**. Encontrar una fórmula de recurrencia que dé la potencia n-ésima de la matriz** A**.**

$|A-\lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -7-\lambda & -6 \\ 12 & 10-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$

Para $\lambda_1 = 1 \Rightarrow (A-I)\vec{v}_1 = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 4x + 3y = 0 \Rightarrow$
$\vec{v}_1 = (3, -4)$

Para $\lambda_2 = 2 \Rightarrow (A-2I)\vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -9 & -6 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 3x + 2y = 0 \Rightarrow$
$\vec{v}_2 = (2, -3)$

La matriz diagonal asociada es $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, la matriz de paso es $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ y su inversa es $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

Por lo tanto, podemos escribir $A = PDP^{-1} \Longrightarrow A^n = PD^nP^{-1} =$
$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$
$A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+3} + 9 & -3 \cdot 2^{n+1} + 6 \\ 3 \cdot 2^{n+2} - 12 & 9 \cdot 2^n - 8 \end{pmatrix}$

4. **Una matriz A es idempotente si $A = A^2$. Probar que si A es idepontente sus únicos valores propios son 0,1.**

   Si λ es un autovalor de A tendremos que $A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow A^2\vec{v} = \lambda A\vec{v} \Rightarrow A\vec{v} = \lambda A\vec{v} \Rightarrow \lambda\vec{v} = \lambda^2\vec{v} \Rightarrow \lambda = \lambda^2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$

5. **Encontrar un cambio de base que diagonalice si es posible las siguientes matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, autovectores: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\lambda_1 = -1, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\lambda_2 = 1$

$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, autovectores: $\vec{v}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\lambda_1=2, \vec{v}_2=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\lambda_2=3$, por lo tanto no se puede diagonalizar

6. **Calcular $f(A)=A^4+A^2+A$ siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.**

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, los autovalores son $\lambda_1=2$ y $\lambda_2=-3$ con los autovectores $\vec{v}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_2=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivamente. Por lo tanto, $A=PDP^{-1}$ con $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $P=\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

Por lo tanto, $f(A)=A^4+A^2+A=PD^4P^{-1}+PD^2P^{-1}+PDP^{-1}=P(D^4+D^2+D)P^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 2^4 & 0 \\ 0 & 3^4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 35 & -26 \\ -26 & 74 \end{pmatrix}$

7. **Sea la aplicación definida por:**

$$f(x,y,z)=(7x-2y+z,-2x+10y-2z,x-2y+7z)$$

Diagonalizar si es posible por un cambio de base ortogonal su matriz asociada A. Indicar la nueva base de $\mathbb{R}^3$ a la que está referida la matriz diagonal.

$A=\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, los autovalores son $\lambda_1=6$ y $\lambda_2=12$ con los autovectores $\vec{v}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ del primer autovalor y $\vec{v}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ del segundo.

8. **Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$. Estudiar para que valores reales de α y β puede diagonalizarse.**

$A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \Rightarrow |A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & \alpha & \beta-\lambda \end{vmatrix}=5\lambda-5\beta-4\beta\lambda+4\lambda^2-\lambda^3+\beta\lambda^2=-(\lambda+1)(\lambda-5)(\lambda-\beta)=0$

Los autovalores de A son $\lambda = -1, \lambda = 5$ y $\lambda = \beta$.

Por lo tanto, si $\beta \neq -1$ y $\beta \neq 5$ habrá tres autovalores distintos y por tanto será diagonalizable independientemente de α

Si $\beta = -1$ este autovalor será doble. Vamos a ver sus autovectores:

$$(A+I)\,\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5x + 3z = 0 \\ \alpha y = 0 \end{matrix}\right\}$$

Si $\beta = -1$ y $\alpha \neq 0$, entonces los autovectores asociados serán de la forma $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3\mu \\ 0 \\ -5\mu \end{pmatrix}$, así que la matriz no será diagonalizable ya que el subespacio generado es de dimensión 1 y el autovalor es doble.

Si $\beta = -1$ y $\alpha = 0$, entonces los autovectores asociados serán de la forma $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3\mu \\ \eta \\ -5\mu \end{pmatrix}$, así que la matriz será diagonalizable ya que el subespacio generado es de dimensión 2 y el autovalor es doble.

Si $\beta = 5$ este autovalor será doble. Vamos a ver sus autovectores:

$$(A-5I)\,\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3z = 0 \\ -6y = 0 \\ \alpha y = 0 \end{matrix}\right\}$$

Independientemente del valor de α los autovectores serán de la forma $\vec{v} = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, así que la matriz no será diagonalizable ya que el subespacio generado es de dimensión 1 y el autovalor es doble.

9. **Demostrar que toda matriz estocástica $A = (a_{ij}),\ i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., n$ con $\sum_{k=1}^{n} a_{kj} = 1, \forall j$ y $a_{ij} \geq 0$ tiene el autovalor 1.**

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ con $\sum_{k=1}^{n} a_{kj} = 1, \forall j$, calculamos los autovalores de A haciendo $|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{(sumando a la fila } n \text{ todas las demás filas)}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-\lambda & 1-\lambda & \cdots & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0.$$ Por lo tanto $\lambda = 1$ será un autovalor.

10. **Se considera la matriz**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que 2 es un autovalor de A, hallar todos los autovalores de A sin necesidad de calcular el polinomio característico. Sugerencia: utilizar el resultado del ejercicio anterior.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -1 & -4 \\ 2 & -\lambda & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2-\lambda & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -1 & -4 \\ 2 & -\lambda & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2-\lambda & 3 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -1 & -4 \\ 2 & -\lambda & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2-\lambda & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 3 & -4 \\ 6 & 4-\lambda & 9 & -4 \\ -4 & -2 & -5-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 3 \\ 6 & 4-\lambda & 9 \\ -4 & -2 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

Por lo tanto A es una matriz estocástica, así que tiene un autovalor que es 1. Esto quiere decir que $|A-\lambda I| = (1-\lambda)(2-\lambda)(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)$

Por otro lado sabemos que $traza(A)$ es una cantidad que se conserva, así tendremos que $traza(A) = traza(D) \Rightarrow 5 = 1+2+\alpha+\beta \Rightarrow \alpha+\beta = 2$

De igual modo tenemos que $|A| = |D| = 1 \cdot 2 \cdot \alpha \cdot \beta = 2\alpha\beta = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 & -4 \\ 6 & 4 & 9 & -4 \\ -4 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 6 & 4 & 9 \\ -4 & -2 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \alpha\beta = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Por lo tanto $\left.\begin{array}{c} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha\beta = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} \alpha + \frac{1}{\alpha} = 2 \\ \beta = \frac{1}{\alpha} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \\ \beta = \frac{1}{\alpha} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{array}\right\}$

Así que $\lambda = 1$ es un autovalor triple y $\lambda = 2$ es un autovalor simple.

11. **Se considera la matriz**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) **Probar que es diagonalizable y encontrar una matriz ortogonal P que permita dicha diagonalización.**

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -2 & 1-\lambda & -1 \\ -2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2+\lambda \\ -2 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$= (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ -4 & -\lambda & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} =$ $(\lambda-2)^3(\lambda+2)$

Si $\lambda = 2 \Rightarrow (A-2I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x - y -$ $z - t = 0 \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta+\gamma \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

Podemos tomar tres autovectores linealmente independientes, por ejemplo: $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0), \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0), \vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)$

Si $\lambda = -2 \Rightarrow (A+2I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$

Tomamos como autovector $\vec{v}_4 = \frac{1}{2}(1,-1,-1,-1)$

La matriz que diagonaliza será $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$ y la matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

b) **Diagonalizar A^2 y A^{-1}.**

La matriz diagonal de A^2 será $D^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

La matriz diagonal de A^{-1} será $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

12. **Calcular aplicando el teorema de Cayley-Hamilton la inversa de la matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 5\lambda^2 - 8\lambda - \lambda^3 + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

Por lo tanto $5A^2 - 8A - A^3 + 4 = 0 \Rightarrow 5A - 8I - A^2 + 4A^{-1} = 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 5A + 8I) =$

$$\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 - 5\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} -1 & 8 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

13. **Considerando la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y A la matriz asociada a un endomorfismo referida a dicha base, se sabe que los subespacios**

$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $x+y+z = 0\}$ y $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $x-y = 0, z-y = 0\}$

están asociados respectivamente a los autovalores $\lambda = 1$ y $\lambda = \frac{1}{2}$. Calcular:

a) **La matriz diagonal asociada al endomorfismo.**

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matriz de paso será $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & .-1 & 1 \end{pmatrix}$ y su inversa $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & .-1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$ $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) **Calcular la matriz** $M = 2A^4 - 7A^3 + 9A^2 - 5A + I$

$M = P(2D^4 - 7D^3 + 9D^2 - 5D + I)P^{-1} =$

$$= P\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{8} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De otra forma podemos hacer $M = 2A^4 - 7A^3 + 9A^2 - 5A + I$, por el teorema de Cayley-Hamilton tendremos que $(A-I)^2(A-\frac{1}{2}I) = 0 \Rightarrow A^3 - \frac{5}{2}A^2 + 2A - \frac{1}{2}I = 0 \Rightarrow$ $2A^3 - 5A^2 + 4A - I = 0$. Por lo tanto $M = A(2A^3 - 5A^2 + 4A - I) - 2A^3 + 5A^2 - 4A + I =$ $A \cdot 0 - 0 = 0$

c) **Calcular la matriz** $N = A^{-3} - 4A^{-2} + 5A^{-1} + 4I$

$N = P(D^{-3} - 4D^{-2} + 5D^{-1} + 4I)P^{-1} =$

$$= P\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right] P^{-1} =$$

$$= P\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1} = 6PIP^{-1} = 6I$$

Otra forma de calcular $N = A^{-3} - 4A^{-2} + 5A^{-1} + 4I$ es haciendo $N = A^{-3}(I - 4A + 5A^2 + 4A^3) = A^{-3}(0 + 6A^3) = 6I$

14. **Describir razonadamente las dinámicas fundamentales del movimiento de un**

móvil de ecuaciones:
$$\left\{\begin{array}{l} x_{t+1}=\frac{5}{2}x_t+3y_t \\ y_{t+1}=-\frac{3}{2}x_t-2y_t \\ z_{t+1}=-6x_t-6y_t-\frac{1}{2}z_t \end{array}\right.$$
donde $\{x_t, y_t, z_t\}$ representa las coordenadas de la posición del móvil en t-ésima transición.

Podemos describir la dinámica como un producto de matrices:
$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 3 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -2 & 0 \\ -6 & -6 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}$$

a) **Si el móvil inicialmente se encuentra en el punto $(1,0,1)$ donde se encuentra en la vigésima transición.**

Si definimos $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 3 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -2 & 0 \\ -6 & -6 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{20} \\ y_{20} \\ z_{20} \end{pmatrix} = A^{20} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Como $A^{20} = PD^{20}P^{-1}$

Diagonalizamos la matriz $A \Rightarrow |A-\lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{5}{2}-\lambda & 3 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -2-\lambda & 0 \\ -6 & -6 & -\frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \frac{3}{4}\lambda -$

$\lambda^3 + \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{4}\right)(\lambda-1)(2\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Calculamos los autovectores:

Para $\lambda = 1 \Rightarrow (A-I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 3 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -3 & 0 \\ -6 & -6 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = (-2\alpha, \alpha, 4\alpha)$

Para $\lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(A + \frac{1}{2}I\right)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = (\alpha, -\alpha, \beta)$

La matriz diagonal es $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y la matriz de paso es $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{20} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{20} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^{20}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^{20}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2^{20}} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2^{20}} & 0 \\ 4 & 0 & \frac{1}{2^{20}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2^{20}} & 2 - \frac{1}{2^{19}} & 0 \\ \frac{1}{2^{20}} - 1 & \frac{1}{2^{19}} - 1 & 0 \\ \frac{1}{2^{18}} - 4 & \frac{1}{2^{18}} - 4 & \frac{1}{2^{20}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{20} \\ y_{20} \\ z_{20} \end{pmatrix} = A^{20} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2^{20}} & 2 - \frac{1}{2^{19}} & 0 \\ \frac{1}{2^{20}} - 1 & \frac{1}{2^{19}} - 1 & 0 \\ \frac{1}{2^{18}} - 4 & \frac{1}{2^{18}} - 4 & \frac{1}{2^{20}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_{20} \\ y_{20} \\ z_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2^{21}-1}{2^{20}} \\ \frac{1-2^{20}}{2^{20}} \\ \frac{5-2^{22}}{2^{20}} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

b) **¿Existen posiciones invariantes?**

Las posiciones invariantes serán las que cumplan que $A\vec{x} = \vec{x}$, como $\lambda = 1$ es un autovalor, todos los autovectores correspondientes serán invariantes, esto es, los vectores de la forma $\vec{x} = (-2\alpha, \alpha, 4\alpha)$

c) **¿Qué ocurre a largo plazo si la posición inicial se encuentra en la recta que pasa por el origen y tiene la dirección del vector $(-1, 1, 0)$ o la del vector $(0, 0, 1)$?**

Tenemos que estudiar el límite en el ∞ de $A^n \Rightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} A^n = P\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} D^n\right) P^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Si inicialmente se encuentra en $\vec{x} = (-\alpha, \alpha, 0) \Rightarrow \vec{x}_\infty = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, o sea que al final el móvil acaba en el origen

Si inicialmente se encuentra en $\vec{x} = (0,0,\alpha) \Rightarrow \vec{x}_\infty = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, o sea que al final el móvil acaba en el origen

15. **En Soria hay dos supermercados de alimentación, Villar y Muñoz. Se sabe que el 70 % de los que van a comprar al supermercado Villar vuelven a comprar al año siguiente, pasándose el 30 % a la competencia. Análogamente, el 60 % de los que compran un año en el autoservicio Muñoz vuelven a comprar en dicho establecimiento al año próximo, pasándose el 40 % restante a comprar al supermercado Villar.**
En el año 2001 entraron 1200 clientes en el supermercado Muñoz. ¿Cuántos clientes entraron en el supermercado Villar en el año 2001 si en el año 2002 entraron el mismo número de clientes en ambos establecimientos?

    La matriz que describe comportamiento de los clientes es $A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} V_{t+1} \\ M_{t+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} V_t \\ M_t \end{pmatrix}$

    $\begin{pmatrix} V_{2002} \\ M_{2002} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{2001} \\ 1200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7V_{2001} + 480 \\ 0.3V_{2001} + 720 \end{pmatrix} \Rightarrow 0.7V_{2001} + 480 = 0.3V_{2001} + 720 \Rightarrow V_{2001} = 600$

16. **Siendo x_0 e y_0 las poblaciones iniciales de conejos y zorros respectivamente, se sabe que el número de conejos en cualquier mes es la mitad de la población de conejos del mes anterior y que el número de zorros en dicho mes es la suma de la población de zorros más la mitad de la de conejos en el mes anterior. Calcular las poblaciones de zorros y conejos a largo plazo. ¿Se extinguirá alguna de las especies mencionadas? Razonar la respuesta.**

    La matriz que describe la evolución de las poblaciones de conejos y zorros es $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

    Diagonalizamos $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$, los autovalores son 0.5 y 1, y los correspondientes autovectores son $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, por lo tanto,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A largo plazo el comportamiento será $\lim_{n\to\infty} A^n = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left[\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \right] \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $\begin{pmatrix} x_\infty \\ y_\infty \end{pmatrix} = A^\infty \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 + y_0 \end{pmatrix}$, la población de conejos tenderá a cero y la de zorros a la suma de las poblaciones iniciales de conejos y zorros, esto quiere decir que los conejos se extinguirán.

17. **Un estudio realizado sobre la comunidad de ingenieros superiores en telecomunicaciones revela el hecho siguiente: el 90 % de los hijos de padres ingenieros superiores en telecomunicaciones cursan estudios de ingeniería en telecomunicaciones y sólo el 20 % de los que no lo hicieron consiguen que sus hijos cursen dicha carrera. ¿Cuál será el porcentaje de estudiantes que cursarán la carrera de ingeniería superior en telecomunicaciones después de muchas generaciones suponiendo un sólo hijo como descendencia en cada familia?**

    La matriz que describe el comportamiento es $A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} T_{t+1} \\ N_{t+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} T_t \\ N_t \end{pmatrix}$

    Diagonalizamos la matriz $A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0.9-\lambda & 0.2 \\ 0.1 & 0.8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.$
    $7\lambda + 0.7 = (\lambda - 0.7)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0.7 \end{cases}$

    Para $\lambda_1 = 1$ el autovector es $\vec{v}_1 = (2, 1)$ y para $\lambda_2 = 0.7$ el autovector es $\vec{v}_2 = (1, -1)$, por lo tanto $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow$

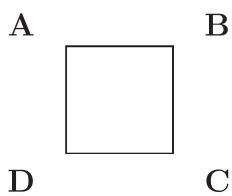
    $$\Rightarrow A = \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

    Para estudiar qué pasará después de muchas generaciones tendremos que analizar el límite de $\lim_{n\to\infty} A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \left[\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}^n \right] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $\begin{pmatrix} T_\infty \\ N_\infty \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_0 \\ N_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}N_0 + \frac{2}{3}T_0 \\ \frac{1}{3}N_0 + \frac{1}{3}T_0 \end{pmatrix}$, luego el porcentaje de estudiantes que cursarán telecomunicaciones será $\frac{2}{3}N_0 + \frac{2}{3}T_0$, donde N_0 y T_0 es el número de no ingenieros y ingenieros de teleco, respectivamente, en el momento inicial.

18. **Una rana que se encuentra en el vértice de un cuadrado tiene probabilidad $1/2$ de ir, de un salto, a cada vértice contiguo. Si inicialmente está en el vértice A, hallar la probabilidad de que se encuentre en cada uno de los vértices después de n saltos.**



La matriz que describe la probabilidad después de un salto es $A = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$.

Si diagonalizamos esta matriz obtenemos los autovalores

$\lambda_1 = -1$ con autovector $\vec{v}_1 = (-1, 1, -1, 1)$, $\lambda_2 = 1$ con autovector $\vec{v}_2 = (1, 1, 1, 1)$ y $\lambda_3 = 0$ doble, con autovectores $\vec{v}_3 = (1, 0, -1, 0)$ y $\vec{v}_4 = (0, 1, 0, -1)$, por lo tanto $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, con la matriz de paso $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Después de n saltos tendremos que

$$A^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (-1)^n+1 & -(-1)^n+1 & (-1)^n+1 & -(-1)^n+1 \\ -(-1)^n+1 & (-1)^n+1 & -(-1)^n+1 & (-1)^n+1 \\ (-1)^n+1 & -(-1)^n+1 & (-1)^n+1 & -(-1)^n+1 \\ -(-1)^n+1 & (-1)^n+1 & -(-1)^n+1 & (-1)^n+1 \end{pmatrix}$$

Si inicialmente estaba en el punto A, después de n saltos la probabilidad de que esté en cada uno de los vértices será la siguiente

$$\begin{pmatrix} p_A \\ p_B \\ p_C \\ p_D \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (-1)^n+1 & -(-1)^n+1 & (-1)^n+1 & -(-1)^n+1 \\ -(-1)^n+1 & (-1)^n+1 & -(-1)^n+1 & (-1)^n+1 \\ (-1)^n+1 & -(-1)^n+1 & (-1)^n+1 & -(-1)^n+1 \\ -(-1)^n+1 & (-1)^n+1 & -(-1)^n+1 & (-1)^n+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (-1)^n+1 \\ -(-1)^n+1 \\ (-1)^n+1 \\ -(-1)^n+1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, si el número de saltos es impar la probabilidad será $(p_A, p_B, p_C, p_D) = (0, 0.5, 0, 0, 5)$, mientras que si el número de saltos es par $(p_A, p_B, p_C, p_D) = (0.5, 0, 0.5, 0)$

19. **Una agencia naviera tiene su flota distribuída entre los puertos de Barcelona, Málaga y Mallorca. De los barcos que al comienzo de cada mes están en Barcelona, al final del mes sólo vuelve la mitad, un 20 % se va a Málaga y el resto a Mallorca; de los que están en Málaga, a fin de mes un 20 % se va a Barcelona, un 40 % a Mallorca y el resto vuelve a Málaga; y de los que estaban a principio de mes en Mallorca, un 80 % regresa y el resto va a Barcelona. Suponiendo que la flota es constante.**

    a) **Plantear en forma matricial un modelo que represente la distribución de la flota.**

    $$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} B_{t+1} \\ MG_{t+1} \\ MA_{t+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} B_t \\ MG_t \\ MA_t \end{pmatrix}$$

    b) **Sabiendo que en el instante actual hay 350, 500 y 200 barcos en Barcelona, Málaga y Mallorca, respectivamente, determinar el número de barco que habrá en cada puerto al cabo de k meses.**

    Diagonalizamos $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}$ y encontramos los autovalores $\lambda_1 = 0.3, \lambda_2 = 0.4$ y $\lambda_3 = 1$, cuyos autovectores son $\vec{v}_1 = (1, -2, 1), \vec{v}_2 = (0, -1, 1)$ y $\vec{v}_3 = (6, 2, 13)$, respectivamente. Por lo tanto, $D = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 13 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -28 & -7 & 14 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Después de k meses

$$A^k = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.3^k & 0 & 0 \\ 0 & 0.4^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -28 & -7 & 14 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_k \\ MG_k \\ MA_k \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.3^k & 0 & 0 \\ 0 & 0.4^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -28 & -7 & 14 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 350 \\ 500 \\ 200 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 50 \cdot 0.3^k + 300 \\ -100 \cdot 0.3^k + 500 \cdot 0.4^k + 100 \\ 50 \cdot 0.3^k - 500 \cdot 0.4^k + 650 \end{pmatrix}$$

$c)$ **¿Cuál será la flota de barcos en cada puerto a largo plazo?.**

A largo plazo tendremos que estudiar el límite cuando k tiende a $\infty \Rightarrow \begin{pmatrix} B_\infty \\ MG_\infty \\ MA_\infty \end{pmatrix} =$

$$\frac{1}{21}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 13 & 13 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 350 \\ 500 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 650 \end{pmatrix}$$

20. **Una agencia de transportes tiene la flota de camiones distribuída entre Madrid, Sevilla y Barcelona. De los camiones que hay al principio de cada mes en Madrid, al final del mes vuelven la mitad, la cuarta parte va a Sevilla y el resto a Barcelona; de los que están en Sevilla, la tercera parte vuelve y el reto va a Barcelona; y de los que estaban al principio en Barcelona, la mitad se va a Madrid, la cuarta parte a Sevilla y el reto vuelve a Barcelona. Suponiendo que el número de camiones de la flota permanece constante. Calcular el tanto por ciento de camiones que hay en cada ciudad al cabo de k meses.**

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} M_1 \\ S_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} M_0 \\ S_0 \\ B_0 \end{pmatrix}$$

Diagonalizamos $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, encontramos los autovalores $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = \frac{1}{12}$, cuyos autovectores son $\vec{v}_1 = (-1, 0, 1), \vec{v}_2 = (4, 3, 4)$ y $\vec{v}_3 = (-6, 1, 5)$, respectivamente.

Por lo tanto, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$ con $P = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 11 & -44 & 22 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

Después de k meses, tendremos que

$$A^k = PD^kP^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12^k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & -44 & 22 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 8 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} \frac{18}{12^k} + 4 & -\frac{48}{12^k} + 4 & \frac{18}{12^k} + 4 \\ -\frac{3}{12^k} + 3 & \frac{8}{12^k} + 3 & -\frac{3}{12^k} + 3 \\ -\frac{15}{12^k} + 4 & \frac{40}{12^k} + 4 & -\frac{15}{12^k} + 4 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $\begin{pmatrix} M_k \\ S_k \\ B_k \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} \frac{18}{12^k} + 4 & -\frac{48}{12^k} + 4 & \frac{18}{12^k} + 4 \\ -\frac{3}{12^k} + 3 & \frac{8}{12^k} + 3 & -\frac{3}{12^k} + 3 \\ -\frac{15}{12^k} + 4 & \frac{40}{12^k} + 4 & -\frac{15}{12^k} + 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ S_0 \\ B_0 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} B_0 \left(\frac{18}{12^k} + 4\right) + M_0 \left(\frac{18}{12^k} + 4\right) + S_0 \left(-\frac{48}{12^k} + 4\right) \\ B_0 \left(-\frac{3}{12^k} + 3\right) + M_0 \left(-\frac{3}{12^k} + 3\right) + S_0 \left(\frac{8}{12^k} + 3\right) \\ B_0 \left(-\frac{15}{12^k} + 4\right) + M_0 \left(-\frac{15}{12^k} + 4\right) + S_0 \left(\frac{40}{12^k} + 4\right) \end{pmatrix}$$

A largo plazo (o sea, cuando k tiende a ∞) tendremos que $\begin{pmatrix} M_\infty \\ S_\infty \\ B_\infty \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 4(B_0 + M_0 + S_0) \\ 3(B_0 + M_0 + S_0) \\ 4(B_0 + M_0 + S_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} \\ \frac{3}{11} \\ \frac{4}{11} \end{pmatrix} (B_0 + M_0 + S_0)$

- **Matriz de Jordan**

21. **Reducir la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ a su forma de Jordan y dar la matriz de paso.**

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, ya que $J = P^{-1}AP$

22. **Encontrar la forma de Jordan de** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **y calcular** A^5**.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{10}\sqrt{5}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{10}\sqrt{5}+\frac{1}{2} & \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} -\frac{1}{10}\sqrt{5}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{10}\sqrt{5}+\frac{1}{2} & \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}\sqrt{5}+\frac{11}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2}\sqrt{5}+\frac{11}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{10}\sqrt{5}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{10}\sqrt{5}+\frac{1}{2} & \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

23. **Encontrar la forma canónica de Jordan y el cambio de base correspondiente de las siguientes matrices:**

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(g) $G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (h) $H = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$e)\ \ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f)\ \ F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

$$g)\ \ G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -\frac{5}{2} & -2\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}+5} & \frac{1}{3\sqrt{5}+5}\left(-7\sqrt{5}-15\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ \frac{20}{10\sqrt{5}+30}+16\frac{\sqrt{5}}{10\sqrt{5}+30} & \frac{10}{10\sqrt{5}+30}-2\frac{\sqrt{5}}{10\sqrt{5}+30} & \frac{10}{10\sqrt{5}+30}+6\frac{\sqrt{5}}{10\sqrt{5}+30} \\ -\frac{50}{10\sqrt{5}+30}-26\frac{\sqrt{5}}{10\sqrt{5}+30} & \frac{50}{10\sqrt{5}+30}+22\frac{\sqrt{5}}{10\sqrt{5}+30} & -\frac{10}{10\sqrt{5}+30}-6\frac{\sqrt{5}}{10\sqrt{5}+30} \end{pmatrix}$$

$$h)\ \ H = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

24. **Demostrar que la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:**

$$f(x, y, z) = (x + z, 2y + z, 3z - x)$$

no es diagonalizable.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

25. **Hallar según los valores de a y b la forma canónica de Jordan de la siguiente matriz:**

$$\begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Tiene dos autovalores $\lambda = -1$ doble y $\lambda = 2$ simple. Vamos a obtener los autovectores asociados.

Para $\lambda = 2$

$(A-2I)\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & a & 0 \\ 0 & -3 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -a/3 & 0 \\ 0 & 1 & -b/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$S_1(2) = \ker(A-2I) = \{(\alpha ab/9, \alpha b/3, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \alpha \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \overrightarrow{u_3} = (ab/9, b/3, 1)$

Para $\lambda = -1$

$(A+I)\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ay = 0 \\ bz = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$

Si $a = 0$ hay dos parámetros libres y por lo tanto podemos crear un subespacio $S_1(-1) = \ker(A+I) = \{(\alpha, \beta, 0) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ de dimensión 2 para el autovalor $\lambda = -1$ y por lo tanto es diagonalizable.

Los autovectores son $\overrightarrow{u_1} = (1,0,0), \overrightarrow{u_2} = (0,1,0)$.

Para este caso tendremos $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si $a \neq 0$ sólo podemos encontrar un subespacio

$S_1(-1) = \ker(A+I) = \{(\alpha, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \alpha \in \mathbb{R}\}$ de dimensión 1 para el autovalor $\lambda = -1$, por lo tanto tenemos que construir $\ker((A+I)^2)$

$(A+I)^2\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 3b \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\begin{cases} abz = 0 \\ 3bz = 0 \\ 9z = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$S_2(-1) = \ker((A+I)^2) = \{(\alpha, \beta, 0) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$ tendremos $\overrightarrow{u_2} = (0,1,0) \Rightarrow$

$\overrightarrow{u_1} = (A+I)\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{u_1} = (a, 0, 0)$

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} a & 0 & ab/9 \\ 0 & 1 & b/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{9}b \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & ab/9 \\ 0 & 1 & b/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{9}b \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

26. **Calcular e^A, donde**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{e}^A = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^3 & 0 & 0 \\ \mathrm{e}^3 & \mathrm{e}^3 & 0 \\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^3 & \mathrm{e}^3 & \mathrm{e}^3 \end{pmatrix}$$

27. **Calcular e^A en los siguientes casos:**

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 10-1 & 4 & 13 \\ 5 & 3-1 & 7 \\ -9 & -4 & -12-1 \end{pmatrix}; \quad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) $$A = \begin{pmatrix} 10-1 & 4 & 13 \\ 5 & 3-1 & 7 \\ -9 & -4 & -12-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -2 & -6 \\ 5 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 13 \\ 5 & 2 & 7 \\ -9 & -4 & -13 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{e}^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -2 & -6 \\ 5 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4\mathrm{e}^{-2}+6 & -2\mathrm{e}^{-2}+2 & -6\mathrm{e}^{-2}+7 \\ -2\mathrm{e}^{-2}+3 & -\mathrm{e}^{-2}+2 & -3\mathrm{e}^{-2}+4 \\ 4\mathrm{e}^{-2}-5 & 2\mathrm{e}^{-2}-2 & 6\mathrm{e}^{-2}-6 \end{pmatrix}$$

b) $$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^4 & e^4 & \frac{1}{2}e^4 \\ 0 & e^4 & e^4 \\ 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^4 & 4e^4 & 0 \\ 0 & 2e^4 & e^4 \\ 0 & -e^4 & 0 \end{pmatrix}$$

28. **Sea la matriz $A \in \mathcal{M}_{15\times 15}$ donde $|A-\lambda I| = (\lambda-3)^5(\lambda+2)^4(\lambda+1)^3(\lambda-1)^3$**

$rang(A-3I)=12$**;** $\quad \dim(S_1(-2))=2$**;** $\quad \dim(S_1(1))=1$
$rang((A-3I)^2)=10$**;** $\quad \dim(S_2(-2))=4$**;** $\quad \dim(S_2(1))=2$
$rang(A+I)=12$**;**

construir la matriz de Jordan.

Para $\lambda = 3$

$n_1 = 15-12 = 3$

$n_2 = 15-10 = 5$

$d_2 = 5-3 = 2$, dos cajas de orden 2

$d_1 = 3, d_1 - d_2 = 3-2 = 1$, una caja de orden 1

Para $\lambda = -2$

$n_1 = 2$

$n_2 = 4$

$d_2 = 4-2 = 2$, dos cajas de orden 2

$d_1 = 2, d_1 - d_2 = 2-2 = 0$, cero cajas de orden 1

Para $\lambda = -1$

$n_1 = 15-12 = 3$, tres cajas de orden 1

Para $\lambda = 1$

$n_1 = 1$

$n_2 = 2$

Por lo tanto tendremos que para $\lambda = 1 \Rightarrow \dim(S_3(1)) = 3 \Rightarrow n_3 = 3$

$d_3 = 3-2 = 1$, una caja de orden 3

$d_2 = 2-1 = 1, d_2 - d_3 = 1-1 = 0$, cero cajas de orden 2

$d_1 = 1, d_1 - d_2 = 1-1 = 0$, cero cajas de orden 1

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 3 & & & & & & & & & & & & & \\ & & 3 & 1 & & & & & & & & & & & \\ & & 0 & 3 & & & & & & & & & & & \\ & & & & 3 & & & & & & & & & & \\ & & & & & -2 & 1 & & & & & & & & \\ & & & & & 0 & -2 & & & & & & & & \\ & & & & & & & -2 & 1 & & & & & & \\ & & & & & & & 0 & -2 & & & & & & \\ & & & & & & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & & & & & & & 1 & 1 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & 0 & 1 & 1 \\ & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

F. Soluciones Tema 6: Espacios Vectoriales Euclídeos

EJERCICIOS

- ## Producto escalar

1. **Si los vectores no nulos $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ son todos ortogonales entre sí en un espacio euclídeo, demostrar que también son linealmente independientes.**

   $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_n\vec{x}_n = \vec{0} \Rightarrow$(multiplicando por $\vec{x}_i$)$\Rightarrow \alpha_1\vec{x}_i \cdot \vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_i \cdot \vec{x}_2 + ... + \alpha_i\vec{x}_i \cdot \vec{x}_i + ... + \alpha_n\vec{x}_i \cdot \vec{x}_n = \vec{x}_i \cdot \vec{0} \Rightarrow$(como son ortogonales entre sí)$\Rightarrow \alpha_i\vec{x}_i \cdot \vec{x}_i = 0 \Rightarrow$(como $\vec{x}_i \cdot \vec{x}_i \neq 0$)$\Rightarrow \alpha_i = 0$

2. **¿Cuáles de las siguientes funciones $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ define un producto escalar?**

   a) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2y_1x_2 - 3x_1y_2$
   No es producto escalar ya que no es simétrico en $\vec{x}$ e $\vec{y}$

   b) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 - x_2y_2$
   No es producto escalar ya que $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = x_1x_1 - x_2x_2$ podría dar un valor negativo y en un producto escalar se debe cumplir que $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$

   c) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3y_1x_2 + 7x_2y_2$
   No es producto escalar ya que no es simétrico en $\vec{x}$ e $\vec{y}$

   d) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_1y_2 + 3y_1x_2$
   No es un producto escalar ya que no cumple que $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = x_1x_1 + 2x_2x_2 + 3x_1x_2 + 3x_1x_2 = x_1^2 + 2x_2^2 + 9x_1x_2 > 0$, por ejemplo, si $x_1 = -x_2 < 0 \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 3x_2^2 - 9x_2^2 = -6x_2^2 < 0$

   e) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2y_1x_2$
   Sí es un producto escalar, ya que:

   - es simétrica
   - cumple la propiedad distributiva
   - $\langle \lambda\vec{x}, \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$
   - $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ si $\vec{x} \neq 0$ ya que $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 2x_1x_1 + 3x_2x_2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_2 = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2 = (\sqrt{2}x_1 + \sqrt{2}x_2)^2 + x_2^2$

     La matriz del producto escalar es $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Justificar la respuesta. Encontrar la matriz, en la base canónica, de aquellas funciones que sean producto escalar.

3. **Encontrar la expresión analítica del módulo de un vector y del coseno del ángulo de dos vectores en $\mathbb{R}^2$ para aquellas de las funciones de ejercicio 2, que sean producto escalar.**

   $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2}$

   $\cos\alpha = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|} = \frac{2x_1y_1+3x_2y_2+2x_1y_2+2y_1x_2}{\sqrt{2x_1^2+3x_2^2+4x_1x_2}\sqrt{2y_1^2+3y_2^2+4y_1y_2}}$

4. **Dada la siguiente matriz**

$$\begin{pmatrix} 37 & 10 & -4 \\ 10 & 28 & 14 \\ -4 & 14 & 25 \end{pmatrix}$$

   a) **Verificar que define un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ respecto de la base canónica.**

   Es una matriz simétrica y los menores principales son positivos

   $A_1 = 37, A_2 = \begin{vmatrix} 37 & 10 \\ 10 & 28 \end{vmatrix} = 936, A_3 = \begin{vmatrix} 37 & 10 & -4 \\ 10 & 28 & 14 \\ -4 & 14 & 25 \end{vmatrix} = 14\,580$

   b) **Hallar el producto escalar de los vectores** $\vec{x} = (1, 0, 1)\,,\ \vec{y} = (0, 1, -2)\,.$

   $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 37 & 10 & -4 \\ 10 & 28 & 14 \\ -4 & 14 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -18$

   c) **Hallar un vector ortogonal al vector** $\vec{x} = (1, 0, 1)\,.$

   $\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 37 & 10 & -4 \\ 10 & 28 & 14 \\ -4 & 14 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 33\alpha + 24\beta + 21\gamma = 3(11\alpha + 8\beta + 7\gamma) = 0$

   Tomamos por ejemplo $\vec{z} = (0, -7, 8)$ y en este caso tendremos que $\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = 0$ y por lo tanto $\vec{z}$ es ortogonal a $\vec{x}$

5. **Se considera el espacio vectorial de los polinomios de segundo grado,** $P_2[x] = \{ax^2+bx+c$**, con** $a, b, c \in \mathbb{R}\}$**, y dados dos elementos de** $P_2[x]$**, se define la operación**

$$\langle p(x) \cdot q(x) \rangle = \int_0^1 [p\,(t) \cdot q\,(t)]\, dt$$

a) **Demostrar que se ha definido así un producto escalar en $P_2[x]$.**

Tomamos $p(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ y $q(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$, por lo tanto $p(t) \cdot q(t) = (a_1t^2 + b_1t + c_1) \cdot (a_2t^2 + b_2t + c_2) = a_1a_2t^4 + (a_1b_2 + a_2b_1)t^3 + (a_1c_2 + a_2c_1 + b_1b_2)t^2 + (b_1c_2 + b_2c_1)t + c_1c_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle p(x) \cdot q(x) \rangle = \int_0^1 (a_1a_2t^4 + (a_1b_2 + a_2b_1)t^3 + (a_1c_2 + a_2c_1 + b_1b_2)t^2 + (b_1c_2 + b_2c_1)t + c_1c_2)dt = \frac{1}{5}a_1a_2 + \frac{1}{4}a_1b_2 + \frac{1}{4}a_2b_1 + \frac{1}{3}a_1c_2 + \frac{1}{3}a_2c_1 + \frac{1}{3}b_1b_2 + \frac{1}{2}b_1c_2 + \frac{1}{2}b_2c_1 + c_1c_2$

Por lo tanto la matriz del producto escalar es

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle p(x) \cdot q(x) \rangle = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Es una matriz simétrica y sus menores principales son todos positivos

$$A_1 = \frac{1}{5}, A_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{240}, A_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2160}$$

b) **Calcular el producto escalar de $p(x) = x$ y $q(x) = 1 - x$.**

$$\langle p(x) \cdot q(x) \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}$$

6. **En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ de las matrices reales de orden 3, demostrar que**

$$\langle A, B \rangle = traza\left(AB^t\right)$$

es un producto escalar.

$$\langle A, B \rangle = traza\left(AB^t\right) = traza\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}\right) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} +$$
$$a_{13}b_{13} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{23} + a_{31}b_{31} + a_{32}b_{32} + a_{33}b_{33}$$

La matriz del producto escalar será la matriz identidad de orden 9, $\mathbb{I}_9$, por lo tanto es simétrica y definida positiva y representará un producto escalar.

- ## Ortogonalización

7. **Sean $\vec{x}_1 = (-2, -2, 1), \vec{x}_2 = (0, -1, 0)$ y $\vec{x}_3 = (1, -1, 0)$ tres vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$. Definimos un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ afirmando que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ son una base ortonormal. Encontrar la expresión analítica de este producto escalar en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.**

La matriz del producto escalar será $P = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ y además tendremos que

$$\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2b + 2d - e = 0$$

$$\langle \vec{x}_1, \vec{x}_3 \rangle = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2a + c + 2d - e = 0$$

$$\langle \vec{x}_2, \vec{x}_3 \rangle = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -b + d = 0 \Rightarrow b = d$$

$$\langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4a + 8b - 4c + 4d + f - 4e = 1$$

$$\langle \vec{x}_2, \vec{x}_2 \rangle = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = d = 1$$

$$\langle \vec{x}_3, \vec{x}_3 \rangle = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = a - 2b + d = 1 \Rightarrow a = 2b$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones, obteniendo que $a = 2, b = d = 1, e = 4, c = 6, f = 21$

Por lo tanto $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & 21 \end{pmatrix}$

8. **Sean** $\vec{x}_1 = (1, 2, 0, 0), \vec{x}_2 = (1, 0, 0, 2)$, **y** $\vec{x}_3 = (1, -1, -1, 2)$ **tres vectores de** $\mathbb{R}^4$. **Sea** $W = L(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ **el subespacio engendrado por** $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$.

   a) **Encontrar una base ortonormal** $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ **de** W **usando el método de Gram-Schmidt de ortonormalización.**

   $\vec{y}_1 = \vec{x}_1 = (1, 2, 0, 0)$

   $\vec{y}_2 = \vec{x}_2 + \alpha \vec{y}_1$, además $\langle \vec{y}_1, \vec{y}_2 \rangle = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{\langle \vec{y}_1, \vec{x}_2 \rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle} = -\frac{1}{5} \Rightarrow \vec{y}_2 = \left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 0, 2\right)$

$\vec{y}_3 = \vec{x}_3 + \alpha\vec{y}_1 + \beta\vec{y}_2$, además $\langle\vec{y}_1, \vec{y}_3\rangle = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{\langle\vec{y}_1,\vec{x}_3\rangle}{\langle\vec{y}_1,\vec{y}_1\rangle} = \frac{1}{5}$, $\langle\vec{y}_2, \vec{y}_3\rangle = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{\langle\vec{y}_2,\vec{x}_3\rangle}{\langle\vec{y}_2,\vec{y}_2\rangle} = -\frac{26}{5} \cdot \frac{25}{120} = -\frac{13}{12} \Rightarrow \vec{y}_3 = (1,-1,-1,2) + \frac{1}{5}(1,2,0,0) - \frac{13}{12}(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 0, 2) \Rightarrow$
$\vec{y}_3 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -1, -\frac{1}{6}\right)$

Ahora normalizamos

$\vec{v}_1 = \frac{\vec{y}_1}{\|\vec{y}_1\|} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, 0\right)$

$\vec{v}_2 = \frac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 0, 2) = \left(\frac{\sqrt{30}}{15}, -\frac{\sqrt{30}}{30}, 0, \frac{\sqrt{30}}{6}\right)$

$\vec{v}_3 = \frac{\vec{y}_3}{\|\vec{y}_3\|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -1, -\frac{1}{6}) = \left(\frac{\sqrt{42}}{21}, -\frac{\sqrt{42}}{42}, -\frac{\sqrt{42}}{7}, -\frac{\sqrt{42}}{42}\right)$

b) **Extender la base encontrada en (a) a una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$.**

Tomamos un vector linealmente independiente a $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ e $\vec{y}_3$, por ejemplo, $\vec{x}_4 = (0,0,1,0)$ y a partir de ahí construímos $\vec{y}_4$ ortogonal a los anteriores:

$\vec{y}_4 = \vec{x}_4 + \alpha\vec{y}_1 + \beta\vec{y}_2 + \gamma\vec{y}_3$

$\langle\vec{y}_1, \vec{y}_4\rangle = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{\langle\vec{y}_1,\vec{x}_4\rangle}{\langle\vec{y}_1,\vec{y}_1\rangle} = 0$

$\langle\vec{y}_2, \vec{y}_4\rangle = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{\langle\vec{y}_2,\vec{x}_4\rangle}{\langle\vec{y}_2,\vec{y}_2\rangle} = 0$

$\langle\vec{y}_3, \vec{y}_4\rangle = 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{\langle\vec{y}_3,\vec{x}_4\rangle}{\langle\vec{y}_3,\vec{y}_3\rangle} = \frac{6}{7}$

$\vec{y}_4 = (0,0,1,0) + \frac{6}{7}\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -1, -\frac{1}{6}\right) \Rightarrow \vec{y}_4 = \left(\frac{2}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{7}\right)$

Ahora normalizamos para obtener $\vec{v}_4 = \frac{\vec{y}_4}{\|\vec{y}_4\|} = \frac{7}{\sqrt{7}}\left(\frac{2}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{7}\right) = \left(\frac{2\sqrt{7}}{7}, -\frac{\sqrt{7}}{7}, \frac{\sqrt{7}}{7}, -\frac{\sqrt{7}}{7}\right)$

9. **Sea $\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle = x_1y_1 + (x_1+x_2)(y_1+y_2) + (x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3)$ un producto escalar de $\mathbb{R}^3$. Encontrar una base ortogonal en $M \subset \mathbb{R}^3$ si**

$$M = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\right\}$$

Tomamos una base de M, por ejemplo $\mathcal{B} = \{\vec{x}_1 = (2,-1,0), \vec{x}_2 = (3,0,-1)\}$. A partir de esta base definimos la base ortonormal $\mathcal{B}_o = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, tomando

$\vec{u}_1 = \vec{x}_1 = (2,-1,0)$

$\vec{u}_2 = \vec{x}_2 + \alpha\vec{u}_1$ con $\langle\vec{u}_1, \vec{u}_2\rangle = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{\langle\vec{u}_1,\vec{x}_2\rangle}{\langle\vec{u}_1,\vec{u}_1\rangle} = -\frac{6+3+2}{4+1+1} = -\frac{11}{6} \Rightarrow \vec{u}_2 = (3,0,-1) - \frac{11}{6}(2,-1,0) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{11}{6}, -1\right)$

10. **Sean $\vec{x}_1 = (1,2,3,4), \vec{x}_2 = (0,3,-2,1), \vec{x}_3 = (1,1,0,0) \in \mathbb{R}^4$. Encontrar todos los vectores de la forma $\vec{x}_3 + \alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ que sean ortogonales a $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ simultáneamente.**

Tomemos $\vec{y} = \vec{x}_3 + \alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2$ con $\langle\vec{y}, \vec{x}_1\rangle = 0, \langle\vec{y}, \vec{x}_2\rangle = 0$

$\langle \vec{y}, \vec{x}_1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{x}_3, \vec{x}_1 \rangle + \alpha \langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle + \beta \langle \vec{x}_2, \vec{x}_1 \rangle = 0$

$\langle \vec{y}, \vec{x}_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{x}_3, \vec{x}_2 \rangle + \alpha \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle + \beta \langle \vec{x}_2, \vec{x}_2 \rangle = 0$

Calculamos los productos escalares

$\langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$

$\langle \vec{x}_2, \vec{x}_1 \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle = 6 - 6 + 4 = 4$

$\langle \vec{x}_2, \vec{x}_2 \rangle = 9 + 4 + 1 = 14$

$\langle \vec{x}_3, \vec{x}_1 \rangle = 1 + 2 = 3$

$\langle \vec{x}_3, \vec{x}_2 \rangle = 3$

Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 4 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{202} \\ -\frac{39}{202} \end{pmatrix}$$

$\vec{y} = \lambda \left((1,1,0,0) - \frac{15}{202} (1,2,3,4) - \frac{39}{202} (0,3,-2,1) \right) = \lambda \left(\frac{187}{202}, \frac{55}{202}, \frac{33}{202}, -\frac{99}{202} \right)$

11. **Sean $\vec{a} = (1,2,0,-1,0)\,, \vec{b} = (0,1,-1,1,0)\,, \vec{c} = (0,0,1,2,1) \in \mathbb{R}^5$. Descomponer $\vec{c}$ en dos vectores, uno de ellos combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y el otro ortogonal al anterior.**

    Queremos $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \vec{d}$ con $\vec{d}$ ortogonal a $\vec{a}$ y $\vec{b}$, por lo tanto

    $\langle \vec{c}, \vec{a} \rangle = \alpha \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \beta \left\langle \vec{b}, \vec{a} \right\rangle$

    $\left\langle \vec{c}, \vec{b} \right\rangle = \alpha \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle + \beta \left\langle \vec{b}, \vec{b} \right\rangle$

    $$\left. \begin{array}{r} \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle = \alpha \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \beta \left\langle \vec{b}, \vec{a} \right\rangle \\ \left\langle \vec{c}, \vec{b} \right\rangle = \alpha \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle + \beta \left\langle \vec{b}, \vec{b} \right\rangle \end{array} \right\} \left. \begin{array}{c} 6\alpha + \beta = -2 \\ \alpha + 3\beta = 1 \end{array} \right\} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{17} \\ \frac{8}{17} \end{pmatrix}$$

    $\vec{d} = \vec{c} - \alpha\vec{a} - \beta\vec{b} = (0,0,1,2,1) + \frac{7}{17} (1,2,0,-1,0) - \frac{8}{17} (0,1,-1,1,0) \Rightarrow \vec{d} = \left(\frac{7}{17}, \frac{6}{17}, \frac{25}{17}, \frac{19}{17}, 1 \right)$

    Por lo tanto $\vec{c} = -\frac{7}{17} (1,2,0,-1,0) + \frac{8}{17} (0,1,-1,1,0) + \frac{1}{17}(7,6,25,19,17)$

12. **Sea E un espacio euclídeo. Demostrar que $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son ortogonales si y sólo si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.**

    $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0 \Rightarrow \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

13. **Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en un espacio euclídeo, encontrar un tercer vector $\vec{c}$ ortogonal a $\vec{b}$ y tal que $\vec{a}$ se descomponga en la suma de $\vec{c}$ con un vector de la dirección de $\vec{b}$.**

    Tenemos que $\vec{a} = \vec{c} + \alpha\vec{b}$ y además $\left\langle \vec{c}, \vec{b} \right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \alpha \left\langle \vec{b}, \vec{b} \right\rangle \Rightarrow \alpha = -\frac{\left\langle \vec{a},\vec{b} \right\rangle}{\left\langle \vec{b},\vec{b} \right\rangle} \Rightarrow \vec{c} = \vec{a} + \frac{\left\langle \vec{a},\vec{b} \right\rangle}{\left\langle \vec{b},\vec{b} \right\rangle}\vec{b}$

14. **Encontrar una base ortogonal en el espacio $P_2[x] = \{ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}\}$ de los polinomios de grado menor o igual que 2 en el intervalo $[-1, 1]$ donde se ha definido el siguiente producto escalar para todo $p(x), q(x) \in P_2[x]$:**

$$\langle p(x) \cdot q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)\, q(t)\, dt$$

    Sea $p(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ y $q(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2 \Rightarrow \langle p(x) \cdot q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)\, q(t)\, dt = \int_{-1}^{1} (a_1t^2 + b_1t + c_1)(a_2t^2 + b_2t + c_2)\, dt = \frac{2}{5}a_1a_2 + \frac{2}{3}a_1c_2 + \frac{2}{3}a_2c_1 + \frac{2}{3}b_1b_2 + 2c_1c_2 \Rightarrow$ la matriz del producto escalar es $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 2 \end{pmatrix}$

    Partimos de la base canónica de $P_2[x] \Rightarrow \mathcal{B}_C = \{x^2, x, 1\}$ y construiremos una base $\mathcal{B} = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$

    Tomamos como primer vector de la nueva base $p_1(x) = x^2$, un vector ortogonal a este será de la forma $p_2(x) = x + \alpha x^2$ con $\langle p_1(x) \cdot p_2(x) \rangle = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{\left\langle x^2,x \right\rangle}{\langle x^2,x^2 \rangle} = -\frac{0}{2/5} = 0 \Rightarrow p_2(x) = x$

    Un tercer vector ortogonal a los anteriores será de la forma $p_3(x) = 1 + \alpha x + \beta x^2 \Rightarrow$

    $\alpha = -\frac{\langle 1,x \rangle}{\langle x,x \rangle} = -\frac{0}{2/3} = 0$

    $\beta = -\frac{\left\langle x^2,1 \right\rangle}{\langle x^2,x^2 \rangle} = -\frac{2/3}{2/5} = -\frac{5}{3}$

    Por lo tanto $p_3(x) = 1 - \frac{5}{3}x^2$

15. **Construir una base ortonormal para el espacio o subespacio vectorial dado**

    a) $H = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5$ tal que $2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 0\}$

    Una base de H estará formada por $\vec{u}_1 = (1, 0, 0, 0, 2), \vec{u}_2 = (0, 1, 0, 0, -3), \vec{u}_3 = (0, 0, 1, 0, 1), \vec{u}_4 = (0, 0, 0, 1, 4)$

A partir de aquí calculamos una base ortogonal

$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 = (1,0,0,0,2)$

$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 + \alpha\vec{v}_1 \Rightarrow \alpha = -\frac{\langle\vec{u}_2,\vec{v}_1\rangle}{\langle\vec{v}_1,\vec{v}_1\rangle} = \frac{6}{5} \Rightarrow \vec{v}_2 = (0,1,0,0,-3) + \frac{6}{5}(1,0,0,0,2) \Rightarrow \vec{v}_2 = \left(\frac{6}{5},1,0,0,-\frac{3}{5}\right)$

$\vec{v}_3 = \vec{u}_3 + \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha = -\frac{\langle\vec{u}_3,\vec{v}_1\rangle}{\langle\vec{v}_1,\vec{v}_1\rangle} \\ \beta = -\frac{\langle\vec{u}_3,\vec{v}_2\rangle}{\langle\vec{v}_2,\vec{v}_2\rangle} \end{array}\right\} \begin{array}{r} \alpha = -\frac{2}{5} \\ \beta = \frac{3}{14} \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\b\end{array}}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{v}_3 = (0,0,1,0,1) - \frac{2}{5}(1,0,0,0,2) + \frac{3}{14}\left(\frac{6}{5},1,0,0,-\frac{3}{5}\right) \Rightarrow \vec{v}_3 = \left(-\frac{1}{7},\frac{3}{14},1,0,\frac{1}{14}\right)$

$\vec{v}_4 = \vec{u}_4 + \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha = -\frac{\langle\vec{u}_4,\vec{v}_1\rangle}{\langle\vec{v}_1,\vec{v}_1\rangle} \\ \beta = -\frac{\langle\vec{u}_4,\vec{v}_2\rangle}{\langle\vec{v}_2,\vec{v}_2\rangle} \\ \gamma = -\frac{\langle\vec{u}_4,\vec{v}_3\rangle}{\langle\vec{v}_3,\vec{v}_3\rangle} \end{array}\right\} \begin{array}{r} \alpha = -\frac{8}{5} \\ \beta = \frac{6}{7} \\ \gamma = -\frac{4}{15} \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\b\\c\end{array}}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{v}_4 = (0,0,0,1,4) - \frac{8}{5}(1,0,0,0,2) + \frac{6}{7}\left(\frac{6}{5},1,0,0,-\frac{3}{5}\right) - \frac{4}{15}\left(-\frac{1}{7},\frac{3}{14},1,0,\frac{1}{14}\right) \Rightarrow \vec{v}_4 = \left(-\frac{8}{15},\frac{4}{5},-\frac{4}{15},1,\frac{4}{15}\right)$

Ahora normalizamos

$\vec{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,0,0,2), \vec{w}_2 = \sqrt{\frac{5}{14}}\left(\frac{6}{5},1,0,0,-\frac{3}{5}\right), \vec{w}_3 = \sqrt{\frac{14}{15}}\left(-\frac{1}{7},\frac{3}{14},1,0,\frac{1}{14}\right), \vec{w}_4 = \sqrt{\frac{15}{31}}\left(-\frac{8}{15},\frac{4}{5},-\frac{4}{15},1,\frac{4}{15}\right)$

b) **H es el espacio de soluciones de**

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y + z = 0 \\ -2x + 2y - 3z = 0 \\ 4x - 8y + 5z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & -8 & 5 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 7\alpha \\ y = \alpha \\ z = -4\alpha \end{array}\right.$$

$\vec{u}_1 = (7,1,-4)$ genera el subespacio H, entonces tenemos que normalizar $\Rightarrow \vec{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{66}}(7,1,-4)$

16. **Demostrar que si dos matrices P y Q son ortogonales, entonces PQ también es ortogonal.**

    Si P y Q son ortogonales quiere decir que $P^{-1} = P^t, Q^{-1} = Q^t \Rightarrow (PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1} = Q^tP^t = (PQ)^t \Rightarrow PQ$ es ortogonal

▪ Proyección Ortogonal

17. **Probar que dado un subespacio vectorial W de un espacio euclídeo E, y sea $\vec{x} \in E$. Si $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ con $\vec{y} \in W$, se tiene que**

$$\|\vec{z}\| \geq \|P_{W^\perp}(\vec{x})\|$$

Calculamos $\langle \vec{x}, P_{W^\perp}(\vec{x})\rangle$ sabiendo que $P_{W^\perp}(\vec{x})$ es la proyección de $\vec{x}$ sobre el subespacio ortogonal a $W \Rightarrow \langle \vec{x}, P_{W^\perp}(\vec{x})\rangle = \langle \vec{y}+\vec{z}, P_{W^\perp}(\vec{x})\rangle = \langle \vec{y}, P_{W^\perp}(\vec{x})\rangle + \langle \vec{z}, P_{W^\perp}(\vec{x})\rangle \Rightarrow$(como $\vec{y} \in W$ es ortogonal a $P_{W^\perp}(\vec{x})$)$\Rightarrow \langle \vec{x}, P_{W^\perp}(\vec{x})\rangle = \langle \vec{z}, P_{W^\perp}(\vec{x})\rangle \Rightarrow$(definiendo $\cos\theta_\perp$ como el ángulo que forma $\vec{x}$ con $W^\perp$)$\Rightarrow \|P_{W^\perp}(\vec{x})\| \|\vec{x}\| \cos\theta_\perp = \langle \vec{z}, P_{W^\perp}(\vec{x})\rangle \Rightarrow$(como $\|P_{W^\perp}(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|\cos\theta_\perp$)$\Rightarrow \langle \vec{z}, P_{W^\perp}(\vec{x})\rangle = \|P_{W^\perp}(\vec{x})\|^2 \Rightarrow$(definiendo $\theta_{z\perp}$ como el ángulo entre $\vec{z}$ y $P_{W^\perp}(\vec{x})$)$\Rightarrow \|\vec{z}\| \|P_{W^\perp}(\vec{x})\| \cos\theta_{z\perp} = \|P_{W^\perp}(\vec{x})\|^2 \Rightarrow \|\vec{z}\|\cos\theta_{z\perp} = \|P_{W^\perp}(\vec{x})\| \Rightarrow$ $\|\vec{z}\| \geq \|P_{W^\perp}(\vec{x})\|$

18. **Encontrar el complemento ortogonal del subespacio W de E cuando:**

a) $E = \mathbb{R}^3$, W **es el espacio generado por** $\vec{u} = (1,0,1)$ **y** $\vec{v} = (2,-1,1)$

Tenemos que calcular un vector $\vec{w} = (x,y,z)$ que sea ortogonal a $\vec{u} = (1,0,1)$ y $\vec{v} = (2,-1,1)$, ya que será el que genere $W_\perp \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+2F_1}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{w} = \alpha(1,1,-1) \Rightarrow W_\perp = \{(\alpha,\alpha,-\alpha) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \alpha \in \mathbb{R}\}$

b) $E = \mathbb{R}^4$, $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } x_1+x_2+x_3+x_4 = 0 \text{ y } 2x_1 - x_2 = 0\}$

En este caso las ecuaciones paramétricas de W son

$$\left.\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1-x_2=0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=\alpha \\ x_2=2\alpha \\ x_3=\beta \\ x_4=-3\alpha-\beta \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\vec{u}_1 = (1,2,0,-3)$ y $\vec{u}_2 = (0,0,1,-1)$ generarán W, por lo tanto, para generar $W_\perp$ necesitaremos dos vectores $\vec{u}_3$ y $\vec{u}_4$ ortogonales a los anteriores, por lo tanto cumplirán el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} x_1=-2\alpha+3\beta \\ x_2=\alpha \\ x_3=\beta \\ x_4=\beta \end{array}\right. \Rightarrow$$

tomamos $\vec{u}_3 = (-2,1,0,0)$ y $\vec{u}_4 = (3,0,1,1) \Rightarrow$
$W_\perp = \{(-2\alpha+3\beta,\alpha,\beta,\beta) \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} =$
$= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } x_1+2x_2-3x_4 = 0, x_3-x_4 = 0\}$

En ambos se considera el producto escalar usual.

19. **En los siguientes apartados se dan un subespacio H y un vector $\vec{v}$, en cada caso encontrar $P_H(\vec{v})$, una base ortonormal para $H^{\perp}$, y escribir $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ donde $\vec{a} \in H$ y $\vec{b} \in H^{\perp}$**

a) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x + y = 0\}, \vec{v} = (-1, 2)$

$\mathcal{B}_H = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)\right\} \Rightarrow$ para $H^{\perp}$ tendremos que $x - y = 0 \Rightarrow \mathcal{B}_{H^{\perp}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)\right\} \Rightarrow$

$\vec{v} = \alpha\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) + \beta\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = -\sqrt{2} \\ -\alpha + \beta = 2\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \vec{v} = -\frac{3}{2}(1, -1) + \frac{1}{2}(1, 1)$

b) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } 3x - 2y + 6z = 0\}, \vec{v} = (-3, 1, 4)$

$\mathcal{B}_H = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{10}}(0, 3, 1)\right\} \Rightarrow$ para $H^{\perp}$ tendremos que $\left.\begin{array}{r} -2x + z = 0 \\ 3y + z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\mathcal{B}_{H^{\perp}} = \left\{\frac{1}{7}(3, -2, 6)\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ con $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = 0$ y $\vec{b} = \alpha(3, -2, 6) \Rightarrow \alpha = \frac{\langle \vec{v}, (3,-2,6)\rangle}{\|(3,-2,6)\|^2} = \frac{-9-2+24}{49} =$
$\frac{13}{49} \Rightarrow \vec{b} = \frac{13}{49}(3, -2, 6) \Rightarrow \vec{a} = \vec{v} - \vec{b} = (-3, 1, 4) - \frac{13}{49}(3, -2, 6) \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{a} = \left(-\frac{186}{49}, \frac{75}{49}, \frac{118}{49}\right)$

c) $H = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } x = y, w = 3y\}, \vec{v} = (-1, 2, 3, 1)$

$\mathcal{B}_H = \left\{\frac{1}{\sqrt{11}}(1, 1, 0, 3), (0, 0, 1, 0)\right\} \Rightarrow$ para $H^{\perp}$ tendremos que $\left.\begin{array}{r} x + y + 3w = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\mathcal{B}_{H^{\perp}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{10}}(3, 0, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{10}}(0, 3, 0, -1)\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ con $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = 0$ y $\vec{b} = \alpha(3, 0, 0, -1) + \beta(0, 3, 0, -1)$, multiplicamos $\vec{v}$ por $(3, 0, 0, -1)$ y por $(0, 3, 0, -1)$, sabiendo que estos vectores son ortogonales a $\vec{a}$ y obtendremos

$\left.\begin{array}{r} 10\alpha + \beta = -4 \\ \alpha + 10\beta = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{11} \\ \frac{6}{11} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\vec{b} = \frac{-5}{11}(3, 0, 0, -1) + \frac{6}{11}(0, 3, 0, -1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{b} = \left(-\frac{15}{11}, \frac{18}{11}, 0, -\frac{1}{11}\right) \Rightarrow \vec{a} = \vec{v} - \vec{b} = (-1, 2, 3, 1) - \left(-\frac{15}{11}, \frac{18}{11}, 0, -\frac{1}{11}\right) \Rightarrow \vec{a} =$
$\left(\frac{4}{11}, \frac{4}{11}, 3, \frac{12}{11}\right)$

20. **Sea $\vec{F} = (1, 1, 1)$ el vector de la fuerza que mueve una masa puntual a lo largo de la recta $(x, y, z) = \lambda(0, 1, 2)$. Calcular la proyección de $\vec{F}$ sobre la recta.**

Un vector director unitario de la recta es $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,2)$, por lo tanto la proyección de la fuerza sobre la recta es $\vec{F_r} = \left\langle \vec{F}, \vec{u} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(1+2) \Rightarrow \vec{F_r} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

21. **Hallar la matriz proyección para el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1,1,1,1)$ y $(0,1,2,-1)$. Hallar la proyección de los vectores $\vec{u} = (1,-2,1,0)$, $\vec{v} = (2,-1,-4,5)$ y $\vec{w} = (1,0,1,0)$ sobre el subespacio anterior. Interpretar el resultado.**

    La matriz de proyección vendrá dada por la expresión $P = A\left(A^tA\right)^{-1}A^t$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$

    $= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

    $P\vec{u} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}$ es ortogonal al subespacio formado por $(1,1,1,1)$ y $(0,1,2,-1)$

    $P\vec{v} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}$ está contenido en el subespacio formado por $(1,1,1,1)$ y $(0,1,2,-1)$

    $P\vec{w} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

22. **En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar cuya matriz respecto a la base canónica es**

    $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

    y el subespacio $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $x = -z = y\}$.

a) **Calcular el ángulo que forman los vectores** $(1,0,0)$ **y** $(0,1,0)$

$\cos\theta = \frac{\langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle}{\|(1,0,0)\|\|0,1,0\|}$

$$\langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\|(1,0,0)\|^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\|(0,1,0)\|^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

b) **Encontrar una base de** $U^{\perp}$.

Una base de U será $\mathcal{B} = \{(1,1,-1)\}$

Tenemos que buscar dos vectores linealmente independientes que sean ortogonales a $(1,1,-1)$, por lo tanto buscamos vectores (x,y,z) tales que $\langle(1,1,-1),(x,y,z)\rangle =$

$$0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & .-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x+y = 0 \Rightarrow (x,y,z) = (\alpha,-\alpha,\beta) \Rightarrow$$

por lo tanto, una base de $U^{\perp}$ será $\mathcal{B}_{U^{\perp}} = \{(1,-1,0),(0,0,1)\}$

c) **Encontrar la proyección ortogonal de** $(1,-2,0)$ **sobre** $U^{\perp}$.

La matriz de proyección será $P_{U^{\perp}} = A\left(A^tPA\right)^{-1}A^tP$ donde$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$P_{U^{\perp}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$P_{U^{\perp}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } \vec{x} = (1,-2,0) \Rightarrow P_{U^{\perp}}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

También podíamos haber calculado primero la proyección sobre $U \Rightarrow$
$P_U(\vec{x}) = \frac{\langle(1,-2,0)(1,1,-1)\rangle}{\|(1,1,-1)\|^2}(1,1,-1)$, ya que $P_U(\vec{x}) = \alpha(1,1,-1)$ y además $\vec{x} = P_U(\vec{x}) + P_{U^\perp}(\vec{x})$ con $\langle P_U(\vec{x}), P_{U^\perp}(\vec{x})\rangle = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\langle(1,-2,0)(1,1,-1)\rangle}{\|(1,1,-1)\|^2}$

$$\langle(1,-2,0)(1,1,-1)\rangle = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\|(1,1,-1)\|^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow P_U(\vec{x}) = \frac{-1}{2}(1,1,-1) \Rightarrow P_{U^\perp}(\vec{x}) = (1,-2,0) - P_U(\vec{x}) = (1,-2,0) + \frac{1}{2}(1,1,-1) \Rightarrow$
$P_{U^\perp}(\vec{x}) = \frac{1}{2}(3,-3,-1)$

G. Soluciones Tema 7: Formas Bilineales y Cuadráticas

EJERCICIOS

1. **Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación dada por**

$$f(x, y) = 3x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$$

Calcular:

a) **Demostrar que f es bilineal, ¿es simétrica?**

$f(\alpha x + \beta x', y) = 3(\alpha x_1 + \beta x'_1)y_1 - 3(\alpha x_1 + \beta x'_1)y_2 + (\alpha x_2 + \beta x'_2)y_2 = \alpha(3x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2) + \beta(3x'_1y_1 - 3x'_1y_2 + x'_2y_2) = \alpha f(x, y) + \beta f(x', y)$

$f(\alpha x+\beta x', y) = 3x_1(\alpha y_1+\beta y'_1)-3x_1(\alpha y_2+\beta y'_2)+x_2(\alpha y_2+\beta y'_2) = \alpha(3x_1y_1-3x_1y_2+x_2y_2) + \beta(3x_1y'_1 - 3x_1y'_2 + x_2y'_2) = \alpha f(x, y) + \beta f(x, y')$

No es simétrica ya que $f(x, y) \neq f(y, x)$

b) **Hallar la matriz A de f respecto de la base canónica.**

$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) **Hallar la matriz B de f respecto de la base $\mathcal{B} = \{(2, 1), (1, -1)\}$.**

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}_C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}_C}\right)^t AM^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}_C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

Otra forma de hacerlo es tomando $B = \begin{pmatrix} f((2, 1), (2, 1)) & f((2, 1), (1, -1)) \\ f((1, -1), (2, 1)) & f((1, -1), (1, -1)) \end{pmatrix}$

d) **Hallar la matriz P tal que $B = P^tAP$.**

$P = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}_C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. **Sea f una forma bilineal sobre V y h un endomorfismo de V. Demostrar que la aplicación $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = f(h(x), h(y))$ es una forma bilineal sobre V.**

$g(x+x', y) = f(h(x+x'), h(y)) = f(h(x)+h(x'), h(y)) = f(h(x), h(y))+f(h(x'), h(y)) = g(x, y) + g(x', y)$

$g(ax, y) = f(h(ax), h(y)) = f(ah(x), h(y)) = af(h(x), h(y)) = ag(x, y)$

Igual se puede demostrar para la segunda variable.

3. **En $\mathbb{R}^4$ se considera el endomorfismo $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ que respecto de las bases canónicas**
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Se define la siguiente aplicación $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(u, v) = u \cdot g(v)$, donde u y v son vectores de $\mathbb{R}^4$ y el producto $\cdot$ es el producto escalar euclídeo de $\mathbb{R}^4$.

   a) **Prueba que f es una aplicación bilineal simétrica.**
   $f(u, v) = u \cdot g(v) = (u_1, u_2, u_3, u_4) \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \right] = (u_1, u_2, u_3, u_4) \cdot$
   $(v_2 + v_3 - v_4, v_1 - v_3 + v_4, v_1 - v_2 + v_4, -v_1 + v_2 + v_3) = u_1v_2 + u_2v_1 + u_1v_3 + v_1u_3 - u_1v_4 - u_2v_3 - v_1u_4 - u_3v_2 + u_2v_4 + v_2u_4 + u_3v_4 + u_4v_3$
   Como la matriz es simétrica, tenemos una aplicación bilineal simétrica.

   b) **Calcula la matriz asociada a f respecto a la base canónica.**
   La matriz de la aplicación bilineal es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   c) **Halla una base ortogonal para f**
   Podemos encontrar una base ortogonal diagonalizando
   La matriz diagonal es $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y los autovectores normalizados correspondientes a dichos autovalores son, respectivamente:
   $\vec{v}_1 = \dfrac{1}{2}(-1, 1, 1, -1), \vec{v}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(0, 2, -1, 1), \vec{v}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, 1), \vec{v}_4 = \dfrac{1}{\sqrt{12}}(-3, -1, -1, 1)$
   Por lo tanto tendremos que la matriz de paso es $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \end{pmatrix}$
   Y por lo tanto $A = PDP^t$ y la base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ es ortonormal.

4. **Encontrar la matriz de las siguientes formas cuadráticas en $\mathbb{R}^n$ dadas con respecto a la base canónica:**

   a) $Q(\vec{x}) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 + 6x_1x_3,\ n = 3$
   $A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 3 \\ -\frac{3}{2} & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   b) $Q(\vec{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} (x_i - s)^2,\ s = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3),\ n = 3$
   $Q(\vec{x}) = \left(\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3\right)^2 + \left(\frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3\right)^2 + \left(\frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2\right)^2 =$
   $= \frac{2}{3}x_1^2 - \frac{2}{3}x_1x_3 - \frac{2}{3}x_2x_3 - \frac{2}{3}x_1x_2 + \frac{2}{3}x_2^2 + \frac{2}{3}x_3^2 \Rightarrow$
   $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

   c) $Q(\vec{x}) = \displaystyle\sum_{i<j}^{n} (i - j)^2 x_i x_j$
   $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & \cdots & (n-1)^2 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & (n-2)^2 \\ 4 & 1 & 0 & \cdots & (n-3)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)^2 & (n-2)^2 & (n-3)^2 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

5. **Sea $A(\vec{x}, \vec{y})$ una forma bilineal que tiene la expresión:**

$$A(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_3$$

   con respecto a la base $\vec{u}_1 = (1,0,1), \vec{u}_2 = (0,1,0), \vec{u}_3 = (0,1,-1)$ en $\mathbb{R}^3$, donde $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3,\ \vec{y} = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + y_3\vec{u}_3$.

   a) **Encontrar la expresión de $A(\vec{x}, \vec{y})$ con respecto a la base canónica.**
   $A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{\mathcal{B}_c} = \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c}\right)^t A_{\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c}$

Como $M_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A_{\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$A(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 3x_1y_2 + y_3(2x_1 + x_3) + y_1(x_1 - x_2 - 2x_3)$

$\Rightarrow A(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + 3x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_1y_3 - 2y_1x_3 + x_3y_3$

b) **Encontrar una forma bilineal simétrica B y una forma bilineal antisimétrica C tal que $A = B + C$, dando las expresiones de B y C con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.**

Partiendo de $A_{\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, podemos escribir $A = B + C$ con $B = \frac{1}{2}(A + A^t) =$

$= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

y $C = \frac{1}{2}(A - A^t) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. **Encontrar la forma canónica de las siguientes formas cuadráticas:**

a) $3x^2 + 2y^2 + z^2 - 6xy + 4xz$

La matriz de la forma cuadrática es $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, aplicando el método de Jacobi tendremos que

$A_1 = 3, A_2 = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -3, A_3 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -11$, por lo tanto, la forma canónica será $Q = 3z_1^2 - z_2^2 + \frac{11}{3}z_3^2$

b) $xy + 2xz$

La matriz de la forma cuadrática es $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, aquí no podemos aplicar el método de Jacobi ya que hay algún menor nulo, por lo tanto caculamos los autovalores $\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow Q = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}y'^2 + \dfrac{\sqrt{5}}{2}z'^2$

c) $9x^2 - 3y^2 + 6xy + 18xz + 12yz$

La matriz de la forma cuadrática es $A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 9 \\ 3 & -3 & 6 \\ 9 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, aplicando el método de Jacobi tendremos que

$A_1 = 9, A_2 = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -36, A_3 = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 9 \\ 3 & -3 & 6 \\ 9 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 243 \Rightarrow$

$\Rightarrow Q = 9x'^2 - 4y'^2 - \dfrac{27}{4}z'^2$

7. **Sea $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$, y sea f una forma bilineal simétrica tal que**

$$\begin{aligned} f(\vec{u}_1, \vec{u}_1) &= 1 \\ f(\vec{u}_1, \vec{u}_2) &= 1 \\ f(\vec{u}_2, \vec{u}_2) &= 0 \end{aligned}$$

Calcular:

a) **La expresión matricial de la forma cuadrática Q asociada a f en la base $\mathcal{B}$.**
$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) **Encontrar la expresión matricial de la forma cuadrática Q en la nueva base $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, donde:**

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \\ \vec{v}_2 &= \vec{u}_1 - \vec{u}_2 \end{aligned}$$

$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{\mathcal{B}'} = \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^t A_{\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

8. **Encontrar una transformación ortogonal que lleve la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ dada por:**
$$Q(\vec{x}) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$$
a una forma canónica e indicar esta forma canónica. Dar también la forma canónica de Jacobi.

La matriz de la aplicación en la base canónica es $A_{\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, diagonalizamos para encontrar la forma canónica y la correspondiente transformación ortogonal.

$|A_{\mathcal{B}_c} - \lambda I| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 18\lambda^2 - 99\lambda - \lambda^3 + 162 = -(\lambda-6)(\lambda-3)(\lambda-9) = 0 \Rightarrow$ los autovalores son $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6$ y $\lambda_3 = 9$

Calculamos los autovectores unitarios asociados a cada autovalor, ya que serán ortogonales entre sí.

Para $\lambda_1 = 3 \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to$
$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{v}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$

Para $\lambda_2 = 6 \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to$
$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{v}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$

Para $\lambda_3 = 9 \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$
$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{v}_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

En la base $\mathcal{B} = \left\{\vec{v}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right), \vec{v}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\right), \vec{v}_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$ la matriz de la forma cuadrática es $A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ y, por tanto, la forma cuadrática es $Q(\vec{x}) = 3x_1'^2 + 6x_2'^2 + 9x_3'^2$ y la matriz de cambio de base $M_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ y tendremos que $A_{\mathcal{B}} = \left(M_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}\right)^t A_{\mathcal{B}_c} M_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}$

La forma canónica de Jacobi la obtendremos conocidos los menores principales $A_1 = 6, A_2 = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 26, A_3 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 162 \Rightarrow Q(\vec{x}) = 6x_1''^2 + \dfrac{13}{3}x_2''^2 + \dfrac{81}{13}x_3''^2$

9. **Encontrar la forma canónica de Jacobi de la forma cuadrática siguiente**

$$Q(\vec{x}) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

e indicar también los índices de inercia.

La forma canónica de Jordan de la forma cuadrática la obtenemos a partir de los menores principales $A_1 = 3, A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4, A_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \Rightarrow$

$Q(\vec{x}) = 3x_1'^2 - \dfrac{4}{3}x_2'^2 - 2x_3'^2$

El índice de inercia positivo es 1 y el negativo es 2.

10. **Encontrar los valores de α para los cuales la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ dada por:**

$$x^2 + 4y^2 + 2\alpha xy + 2\alpha yz$$

es definida positiva.

La matriz de la forma cuadrática es $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 4 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$, para que sea definida positiva todos los menores principales deben ser positivos, por lo tanto $A_1 = 1 > 0, A_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 4 \end{vmatrix} = 4 - \alpha^2 > 0 \Rightarrow \alpha \in (-2, 2), A_3 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 4 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{vmatrix} = -\alpha^2 > 0$ no se cumplirá nunca, por lo tanto, no puede ser nunca una forma cuadrática definida positiva.

11. **Determinar la región tridimensional en la cual la matriz de las derivadas parciales segundas de la función $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + y^2z^2$ determina una forma cuadrática definida positiva.**

Construímos la matriz hessiana con las derivadas parciales segundas, para ello calculamos primero las derivadas primeras:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 6y + 2yz^2, \frac{\partial f}{\partial z} = 2zy^2$$

y posteriormente las derivadas segundas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6 + 2z^2, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2y^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 4yz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(f(x, y, z)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 + 2z^2 & 4yz \\ 0 & 4yz & 2y^2 \end{pmatrix}$$

Como tiene que cumplirse que los menores principales sean definidos positivos, tendremos que:

$$\left.\begin{array}{r} A_1 = 2 > 0 \\ A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 + 2z^2 \end{vmatrix} = 4\left(3 + z^2\right) > 0 \\ A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 + 2z^2 & 4yz \\ 0 & 4yz & 2y^2 \end{vmatrix} = 8\left[\left(3 + z^2\right) y^2 - 4y^2z^2\right] > 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2 > 0 \text{ se cumple siempre} \\ 3 + z^2 > 0 \text{ se cumple siempre} \\ y^2\left(1 - z^2\right) > 0 \text{ se cumple si } y \neq 0 \text{ y } z \in (-1, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{la región en la que las derivadas}$$

parciales segundas definen una forma cuadrática definida positiva es

$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } y \neq 0, y \in (-1, 1)\right\}$. En esta región la función $f(x, y, z)$ será convexa.

H. Soluciones Tema 8: Cónicas

EJERCICIOS

1. **Los puntos $A(0,3)$ y $B(4,0)$ son diagonalmente opuestos en una circunferencia. Halla la ecuación de ésta.**

   El centro de la circunferencia será: $C = \frac{1}{2}(A+B) \Rightarrow C\left(2,\frac{3}{2}\right)$ y el radio será $r = \frac{1}{2}d(A,B) = \frac{1}{2}\sqrt{(0-4)^2+(3-0)^2} = \frac{5}{2}$, por lo tanto la ecuación de la circunferencia es $(x-2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

2. **Escribe la ecuación de la elipse de focos $(-2,1)$ y $(2,1)$, y $\varepsilon = 0.8$.**

   El centro de la elipse se encontrará en $C = \frac{1}{2}(F_1+F_2) \Rightarrow C(0,1)$. Es una elipse horizontal. La semidistancia focal será $c = d(C,F_1) = \sqrt{(0-2)^2+(1-1)^2} \Rightarrow c = 2$, el semieje mayor es $a = \frac{c}{\epsilon} = \frac{2}{0.8} \Rightarrow a = \frac{5}{2}$ y el semieje menor $b = \sqrt{a^2-c^2} = \sqrt{\frac{25}{4}-4} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$. Por lo tanto, la ecuación de la elipse es $\frac{4x^2}{25}+\frac{4(y-1)^2}{9} = 1$

3. **Completando cuadrados, determina los elementos y escribe la forma canónica de las cónicas dadas por**

   a) $2x^2+3y^2-8x+30y+71=0$

   $$\left.\begin{array}{r} 2x^2-8x = 2\left(x^2-4x+4-4\right) = 2\left((x-2)^2-4\right) \\ 3y^2+30y = 3\left(y^2+10y+25-25\right) = 3\left((y+5)^2-25\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

   $2\left((x-2)^2-4\right)+3\left((y+5)^2-25\right)+71 = 0 \Rightarrow 2(x-2)^2+3(y+5)^2 = 12 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{6}+\frac{(y+5)^2}{4} = 1$

   Es una elipse horizontal, con centro en $C(2,-5)$, semieje mayor (horizontal) $a = \sqrt{6}$, semieje menor (vertical) $b = \sqrt{4} = 2$, semidistancia focal $c = \sqrt{6-4} = \sqrt{2}$. Los focos son $F_1(2-\sqrt{2},-5)$, $F_2(2+\sqrt{2},-5)$. La excentricidad es $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{3}}$

   b) $4x^2-y^2-4x-3=0$

   $4x^2-4x = 4\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right) = 4\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow 4\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right)-y^2-3 = 0 \Rightarrow 4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-y^2 = 4 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{y^2}{4} = 1$

   Es una hipérbola horizontal, con centro en $C\left(\frac{1}{2},0\right)$, semieje principal (horizontal) $a = 1$, semieje secundario (vertical) $b = 2$ y semidistancia focal $c = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$. Los focos son $F_1\left(\frac{1}{2}-\sqrt{5},0\right)$ y $F_2\left(\frac{1}{2}+\sqrt{5},0\right)$. La excentricidad es $\epsilon = \sqrt{5}$. Las asíntotas son $a_1 : y = 2\left(x-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = 2x-1$ y $a_2 : y = -2\left(x-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = -2x+1$

c) $9x^2 + 9y^2 - 36x + 6y + 34 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 9x^2 - 36x = 9\left(x^2 - 4x + 4 - 4\right) = 9\left((x-2)^2 - 4\right) \\ 9y^2 + 6y = 9\left(y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) = 9\left(\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$9\left((x-2)^2 - 4\right) + 9\left(\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right) + 34 = 0 \Rightarrow 9\left(x-2\right)^2 + 9\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = 3 \Rightarrow$
$(x-2)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$

Es una circunferencia con centro $C\left(2, \frac{1}{3}\right)$ y radio $r = \sqrt{\frac{1}{3}}$

4. **Escribe la ecuación de la hipérbola que tienen su centro en el origen, un vértice en el punto $V(1,0)$ y un foco en $F(2,0)$.**

Como el centro está en el origen y un vértice en $V(1,0)$ el semieje principal (horizontal) será $a = 1$, como un foco está en $F(2,0)$ la semidistancia focal es $c = 2$, por lo tanto el otro semieje (vertical) es $b = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$. Por lo tanto la ecuación de la hipérbola es $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

5. **Halla el eje, el vértice y la ecuación de la parábola cuya directriz es la recta $y = -3$ y que tiene por foco $F(1,1)$.**

La distancia focal es la distancia del foco a la directriz, como la directriz es una recta horizontal, la parábola será vertical. Además la distancia focal será $d = 4$, por lo tanto el vértice estará a mitad de distancia entre el foco y la directriz $V\left(1, -1\right)$ y el eje es $x = 1$

6. **Halla la posición relativa del punto $P(2,2)$ y la elipse**

$$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$$

Es una elipse horizontal con semidistancia focal $c = \sqrt{25-16} = 3$ y el centro se encuentra en $C\left(-2,-1\right)$, por lo tanto, los focos son $F_1\left(1,-1\right)$ y $F_2\left(-5,-1\right)$. La suma de las distancias de P a los focos será $d(P,F_1) + d(P,F_2) = \sqrt{1+3^2} + \sqrt{7^2+3^2} = \sqrt{10} + \sqrt{58} > 3 + 7 = 10 = 2a$, por lo tanto el punto es externo a la elipse.

7. **Escribir la ecuación de la elipse con vértices $(-1,2)$ y $(-7,2)$, y el eje menor $b = 1$.**

El centro de la elipse se encontrará en $C = \frac{1}{2}\left(V_1 + V_2\right) \Rightarrow C\left(-4,2\right)$, es una elipse horizontal con semieje mayor será $a = \frac{1}{2}d(V_1,V_2) = 3$, por lo tanto la ecuación de la elipse es $\frac{(x+4)^2}{9} + \left(y-2\right)^2 = 1$

8. **Escribir la ecuación de la hipérbola con asíntotas** $y = \pm 2x - 1$ **y un foco en** $(3, -1)$**.**

   Como las asíntotas son $y + 1 = \pm 2x$, entonces el centro de la hipérbola será $C(0, -1)$. Como un foco es $F_1(3, -1)$, la semidistancia focal será $c = d(C, F_1) = \sqrt{3^2} = 3$, por lo tanto el otro foco se encontrará en una recta que pase por F_1 y C a distancia 3 del centro, cumpliéndose que $C = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) \Rightarrow F_2(-3, -1)$. Se trata de una hipérbola horizontal que cumple que $\frac{b}{a} = 2$ y $a^2 + b^2 = 9 \Rightarrow 5a^2 = 9 \Rightarrow a = \frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow b = \frac{6}{\sqrt{5}}$

   La ecuación de la hipérbola será $\frac{5x^2}{9} - \frac{5(y+1)^2}{36} = 1$

9. **Escribir la ecuación de las parábolas de foco** $(2, -1)$**, que pasan por** $(2, 2)$ **y tienen el eje en la dirección del eje** OX**.**

   Como el foco está en $F(2, -1)$ y pasa por $(2, 2)$, la distancia del punto $(2, 2)$ al foco es 3 y por tanto la distancia del punto a la directriz será 3. Como el eje es enl a dirección del eje OX, la directriz será una recta vertical y, por tanto, tendremos que dicha directriz será o bien $d_1 : x = 5$ o bien $d_2 : x = -1$. Para cada una de estas posibilidades tendremos que el vértice está o bien en $V_1\left(\frac{7}{2}, -1\right)$ o bien $V_2\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, y las parábolas están abiertas hacia la izquierda en el primer caso y hacia la derecha en el segundo. En ambos casos la distancia focal es $p = 3$, así que las posibles parábolas son, o bien:

   $(y + 1)^2 = -6\left(x - \frac{7}{2}\right)$

   o bien,

   $(y + 1)^2 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)$

10. **Clasificar la cónica y expresarla en su forma canónica:**

    a) $x^2 + y^2 + 2xy - 7x - 5y + 7 = 0$

    $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & 7 \end{pmatrix}$$

    $$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & 7 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, I_1 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow$$ parábola no degenerada

    Forma canónica: $I_1 y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}x = 0 \Rightarrow 2y^2 \pm \frac{2}{\sqrt{2}}x = 0 \Rightarrow y^2 \pm \frac{x}{\sqrt{2}} = 0$

    b) $-2x^2 + y^2 + 4xy + 2x - 1 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$I_3 = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0, I_2 = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 < 0, I_1 = -2+1 = -1 \Rightarrow$ hipérbola no degenerada

Los autovalores de I_2 son $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$. La forma canónica es $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = -\frac{I_3}{I_2} \Rightarrow 2x^2 - 3y^2 = \frac{5}{6}$

c) $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 2xy = 5$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -16 \neq 0, I_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, I_1 = 1+1 = 2 \Rightarrow$ parábola no degenerada

Forma canónica: $I_1 y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}x = 0 \Rightarrow 2y^2 \pm 2\sqrt{8}x = 0 \Rightarrow y^2 \pm 2\sqrt{2}x = 0$

d) $2x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 1 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$I_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, I_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0 \Rightarrow$, eigenvalues: $\left\{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}, \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}\right\}$

elipse degenerada $\Rightarrow$ un punto

Los autovalores de I_2 son $\lambda_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}, \lambda_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$. La forma canónica es $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)x^2 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)y^2 = 0$

e) $8x^2 + 17y^2 + 12xy - 8x - 16y = 8$

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -4 \\ 6 & 17 & -8 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix}$$

$I_3 = \begin{vmatrix} 8 & 6 & -4 \\ 6 & 17 & -8 \\ -4 & -8 & -8 \end{vmatrix} = -1200 \neq 0, I_2 = \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 17 \end{vmatrix} = 100 > 0, I_1 = 8 + 17 = 25 \Rightarrow I_1 \cdot I_3 < 0 \Rightarrow$ elipse real no degenerada

Los autovalores de I_2 son $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 20$. La forma canónica es $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = -\frac{I_3}{I_2} \Rightarrow 5x^2 + 20y^2 = 12$

f) $x^2 + 4y^2 + 4xy - 6x - 12y + 9 = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$

$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & 9 \end{vmatrix} = 0, I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, I_1 = 1 + 4 = 5, \gamma = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ parábola degenerada $\Rightarrow$ dos rectas coincidentes

Forma canónica: $I_1 y^2 + \frac{\gamma}{I_1} = 0 \Rightarrow 5y^2 = 0$

g) $x^2 - y^2 + 2x + 6y = 13$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -13 \end{pmatrix}$

$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -13 \end{vmatrix} = 5 \neq 0, I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0, I_1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$ hipérbola no degenerada

Los autovalores de I_2 son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. La forma canónica es $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = -\frac{I_3}{I_2} \Rightarrow x^2 - y^2 = -5$

h) $x^2 - 2y^2 - xy + 2x + 5y - 3 = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{5}{2} & -3 \end{pmatrix}$

$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{5}{2} & -3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \neq 0, I_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3 < 0, I_1 = 1 - 2 = -1 \Rightarrow$ hipérbola no degenerada

Los autovalores de I_2 son $\lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{1}{2}$. La forma canónica es $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = -\frac{I_3}{I_2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{1}{2}\right) x^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}\right) y^2 = \frac{1}{12} \Rightarrow \left(\sqrt{13} - 1\right) x^2 - \left(\sqrt{13} + 1\right) y^2 = \frac{1}{6}$

11. **Clasificar, para distintos valores de los parámetros α, $\beta \in \mathbb{R}$, las cónicas que**

admiten por ecuaciones:

$$\alpha x^2 + \alpha y^2 + 2\beta xy + (\alpha+\beta)(x+y) + 1 = 0$$

a) $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \beta & \alpha & \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \frac{\alpha+\beta}{2} & \frac{\alpha+\beta}{2} & 1 \end{pmatrix}$

$I_3 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \beta & \alpha & \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \frac{\alpha+\beta}{2} & \frac{\alpha+\beta}{2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha+\beta & \alpha+\beta \\ \beta & \alpha & \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \frac{\alpha+\beta}{2} & \frac{\alpha+\beta}{2} & 1 \end{vmatrix} = (\alpha+\beta) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \beta & \alpha & \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \frac{\alpha+\beta}{2} & \frac{\alpha+\beta}{2} & 1 \end{vmatrix} =$
$(\alpha+\beta) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha-\beta & \frac{\alpha-\beta}{2} \\ \frac{\alpha+\beta}{2} & 0 & 1-\frac{\alpha+\beta}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(2-\alpha-\beta)$

$I_2 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$. Los autovalores de I_2 son $\lambda_1 = \alpha+\beta$ y $\lambda_2 = \alpha-\beta$

$I_1 = 2\alpha$

$\gamma = \begin{vmatrix} \alpha & \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \frac{\alpha+\beta}{2} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \frac{\alpha+\beta}{2} & 1 \end{vmatrix} = 2\alpha - \alpha\beta - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta^2$

b) Si $\alpha = \beta$ o $\alpha = -\beta \Rightarrow I_3 = 0, I_2 = 0 \Rightarrow$ es una parábola degenerada.

1) En el primer caso, con $\alpha = \beta \Rightarrow \gamma = 2\alpha - \alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 = 2\alpha(1-\alpha) \Rightarrow$
$\begin{cases} \text{Si } \alpha \in (0,1) \Rightarrow \gamma > 0 \Rightarrow \text{ dos rectas imaginarias} \\ \text{Si } \alpha = 0 \text{ o } \alpha = 1 \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \text{ dos rectas coincidentes} \\ \text{Si } \alpha \in (-\infty,0)\cup(1,\infty) \Rightarrow \gamma < 0 \Rightarrow \text{ dos rectas paralelas} \end{cases}$

2) En el segundo caso, con $\alpha = -\beta \Rightarrow \gamma = 2\alpha + \alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 = 2\alpha \Rightarrow$
$\begin{cases} \text{Si } \alpha \in (0,\infty) \Rightarrow \gamma > 0 \Rightarrow \text{ dos rectas imaginarias} \\ \text{Si } \alpha = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \text{ dos rectas coincidentes} \\ \text{Si } \alpha \in (-\infty,0) \Rightarrow \gamma < 0 \Rightarrow \text{ dos rectas paralelas} \end{cases}$

c) Si $\alpha = 2-\beta \Rightarrow I_3 = 0, I_2 = (\alpha+2-\alpha)(\alpha+\alpha-2) = 4(\alpha-1) \Rightarrow$
$\begin{cases} \text{Si } \alpha = 1, \beta = 1 \Rightarrow I_2 = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \text{ dos rectas coincidentes} \\ \text{Si } \alpha \in (1,\infty) \Rightarrow I_2 > 0 \Rightarrow \text{ elipse degenerada } \Rightarrow \text{ un punto} \\ \text{Si } \alpha \in (-\infty,1) \Rightarrow I_2 < 0 \Rightarrow \text{hipérbola degenerada} \Rightarrow \text{dos rectas que se cortan en un punto} \end{cases}$

d) Si $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \neq -\beta$ y $\alpha \neq 2-\beta \Rightarrow I_3 \neq 0 \Rightarrow$ cónica no degenerada

1) Si $\alpha \in (-|\beta|, |\beta|) \Rightarrow I_2 < 0 \Rightarrow$ hipérbola no degenerada

2) Si $\alpha \in (-\infty, -|\beta|) \cup (|\beta|, \infty) \Rightarrow I_2 > 0 \Rightarrow$ elipse no degenerada. Si $\beta = 0 \Rightarrow$ los autovalores de I_2 son iguales y, por tanto, es una circunferencia. Si $\beta \neq 0 \Rightarrow$ los autovalores son distinto y, por tanto, es una elipse real

I. Soluciones Tema 9: Mínimos Cuadrados

EJERCICIOS

1. **Halla la solución aproximada por el método de los mínimos cuadrados del sistema sobredeterminado**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{1}{14} \end{pmatrix}$$

2. **Ajustar los datos $(0,1), (1,3), (2,4), (3,4)$ y $(4,5)$ mediante una función lineal $f(x) = a + bx$ utilizando el método de mínimos cuadrados.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 43 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 17 \\ 43 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 43 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

3. **La ley de Hooke establece que la longitud y que se estira un resorte es proporcional a la fuerza x aplicada, $y = a + bx$, donde a es la longitud del resorte y b es la constante del resorte.**

   Se colocan cuatro pesos diferentes de 2, 4, 6 y 8 kilogramos en el extremo de un resorte, siendo las longitudes del resorte estirado 3, 6, 8 y 9 centímetros. Calcular la constante del resorte.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 20 & 120 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 150 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 20 & 120 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 26 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 150 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \frac{3}{2} + x$$

   La constante del resorte es $b = 1$

4. **En un parque natural, se estimó durante cuatro años consecutivos el número de ciervos con que contaba su población obteniéndose los siguientes datos**

x_i =**año**	y_i =**n^o de ciervos**
1	**2**
2	**5**
3	**8**
4	**12**

   Teniendo en cuenta que el crecimiento de la población es exponencial en condiciones ideales, ajustar estos datos por una función exponencial $y = a\,\mathrm{e}^{bx}$, utilizando el método de mínimos cuadrados. Estimar el número de ciervos el año 5.

   $y = a\,\mathrm{e}^{bx} \Rightarrow \ln y = \ln a + bx$

x_i =**año**	y_i =**n^o de ciervos**	$\ln y_i$
1	2	$\ln 2$
2	5	$\ln 5$
3	8	$\ln 8$
4	12	$\ln 12$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln 2 \\ \ln 5 \\ \ln 8 \\ \ln 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln a \\ b \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln 2 \\ \ln 5 \\ \ln 8 \\ \ln 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln 2 + \ln 5 + \ln 8 + \ln 12 \\ \ln 2 + 2\ln 5 + 3\ln 8 + 4\ln 12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \ln a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \ln 2 + \ln 5 + \ln 8 + \ln 12 \\ \ln 2 + 2\ln 5 + 3\ln 8 + 4\ln 12 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln 2 + \ln 5 + \ln 8 + \ln 12 \\ \ln 2 + 2\ln 5 + 3\ln 8 + 4\ln 12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \ln a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 12 \\ -\frac{3}{10}\ln 2 - \frac{1}{10}\ln 5 + \frac{1}{10}\ln 8 + \frac{3}{10}\ln 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.255\,41 \\ 0.584\,53 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$a = \exp(\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 12) = 1.2910 \Rightarrow y = 1.2910 \exp(0.58453x)$$

Si $x = 5 \Rightarrow y = 1.2910\mathrm{e}^{0.58453 \cdot 5} \Rightarrow y = 24$ ciervos

5. **Los directores de una gran empresa se reúnen para analizar la situación financiera de la misma. Al estudiar los datos de la tabla que reflejan los beneficios obtenidos durante los cinco años que lleva en funcionamiento la empresa, preven que la curva que mejor puede representar los beneficios durante los próximos años puede ser una función polinómica de segundo grado $y = a + bx + cx^2$. Calcular los beneficios que esperan obtener el año siguiente**

año	**beneficio (millones)**
1	**1**
2	**4**
3	**8**
4	**15**
5	**25**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \\ 15 \\ 25 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \\ 15 \\ 25 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53 \\ 218 \\ 954 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 53 \\ 218 \\ 954 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{5} & -\frac{33}{10} & \frac{1}{2} \\ -\frac{33}{10} & \frac{187}{70} & -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 53 \\ 218 \\ 954 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ -\frac{97}{70} \\ \frac{17}{14} \end{pmatrix}$$

$y = \frac{7}{5} - \frac{97}{70}x + \frac{17}{14}x^2 \Rightarrow y = \frac{7}{5} - \frac{97}{70} \cdot 6 + \frac{17}{14} \cdot 6^2 \Rightarrow y = \frac{184}{5} = 36.8$ millones de beneficio al año siguiente

6. **Se consideran los siguientes puntos** $(1,1), (2,4), (3,7), (4,9)$**. Estudiar qué función es la que mejor se ajusta a los datos, la lineal** $y = a + bx$**, parabólica** $y = a + bx + cx^2$ **o cúbica** $y = a + bx + cx^2 + dx^3$**.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 66 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 21 \\ 66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 66 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{27}{10} \end{pmatrix} \Rightarrow y = -\frac{3}{2} + \frac{27}{10}x \Rightarrow$$

x	y	$-\frac{3}{2} + \frac{27}{10}x$	$y - \left(-\frac{3}{2} + \frac{27}{10}x\right) = \delta$	δ^2
1	1	$\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$
2	4	$\frac{39}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$
3	7	$\frac{33}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{25}$
4	9	$\frac{93}{10}$	$\frac{81}{10}$	$\frac{6561}{100}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{4} \delta_i^2 = \frac{1}{25} + \frac{1}{100} + \frac{4}{25} + \frac{6561}{100} = \frac{3291}{50} = 65.82$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 66 \\ 224 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 21 \\ 66 \\ 224 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{31}{4} & -\frac{27}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{27}{4} & \frac{129}{20} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 66 \\ 224 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{4} \\ \frac{79}{20} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow y = -\frac{11}{4} + \frac{79}{20}x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow$$

x	y	$-\frac{11}{4} + \frac{79}{20}x - \frac{1}{4}x^2$	$y - \left(-\frac{11}{4} + \frac{79}{20}x - \frac{1}{4}x^2\right) = \delta$	δ^2
1	1	$\frac{19}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{400}$
2	4	$\frac{83}{20}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{9}{400}$
3	7	$\frac{137}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{9}{400}$
4	9	$\frac{181}{20}$	$-\frac{1}{20}$	$\frac{1}{400}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{4} \delta_i^2 = \frac{1}{400} + \frac{9}{400} + \frac{9}{400} + \frac{1}{400} = \frac{1}{20} = 0.05$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 10 & 30 & 100 \\ 10 & 30 & 100 & 354 \\ 30 & 100 & 354 & 1300 \\ 100 & 354 & 1300 & 4890 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 66 \\ 224 \\ 798 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 & 30 & 100 \\ 10 & 30 & 100 & 354 \\ 30 & 100 & 354 & 1300 \\ 100 & 354 & 1300 & 4890 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 21 \\ 66 \\ 224 \\ 798 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 & -\frac{625}{6} & 45 & -\frac{35}{6} \\ -\frac{625}{6} & \frac{2905}{18} & -\frac{425}{6} & \frac{167}{18} \\ 45 & -\frac{425}{6} & \frac{63}{2} & -\frac{25}{6} \\ -\frac{35}{6} & \frac{167}{18} & -\frac{25}{6} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 66 \\ 224 \\ 798 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{7}{6} \\ 1 \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \Rightarrow y = -1 + \frac{7}{6}x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 \Rightarrow$$

x	y	$-1+\frac{7}{6}x+x^2-\frac{1}{6}x^3$	$y-\left(-1+\frac{7}{6}x+x^2-\frac{1}{6}x^3\right)=\delta$	δ^2
1	1	1	0	0
2	4	4	0	0
3	7	7	0	0
4	9	9	0	0

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{4} \delta_i^2 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

El mejor ajuste a los datos lo da la función $y = -1 + \frac{7}{6}x + x^2 - \frac{1}{6}x^3$